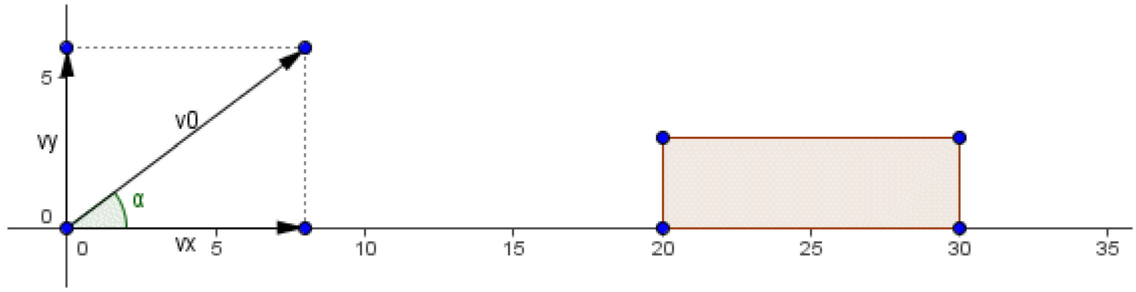
Schiefer Wurf - Beispielaufgabe

Aufgabe:

Ein auf dem Boden liegender Fußball wird durch einen Tritt auf die Geschwindigkeit $v=30\frac{m}{s}$ gebracht.

In Schussrichtung befindet sich eine Flachdach-Garage der Höhe 3 m. Sie befindet sich zwischen 20 und 30 m vom Abschussort entfernt. Unter welchen Winkeln muss der Ball abgeschossen werden, damit sein erster Kontakt mit einem festen Körper erst hinter der Garage auf dem Boden erfolgt?



Der Ball bewegt sich in positiver x-Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit v_x.
In y-Richtung überlagern sich zwei Bewegungen:
1. Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v_y nach oben und
2. Bewegung mit konstanter Beschleunigung g nach unten.

Bewegungsgleichungen:

$x=v_x\cdot t$

$y=v_y\cdot t-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$

Es wird der Winkel für den Grenzfall berechnet, dass der Ball genau den Punkt (30/3) (obere rechte Ecke der Garage) trifft. Da es auf die Bahnkurve ankommt und nicht auf die zeitliche Abhängigkeit, wird die Zeit aus den Gleichungen entfernt:

$t=\frac{x}{v_x} \quad \rightarrow \quad y=\frac{v_y\cdot x}{v_x}-\frac{\frac{1}{2}\cdot g\cdot x^2}{v_x^2}$

Mit den Beziehungen $\sin\alpha=\frac{v_y}{v_0}$ und $\cos\alpha=\frac{v_x}{v_0}$ kann man schreiben $v_y=v_0\cdot\sin\alpha$ und $v_x=v_0\cdot\cos\alpha$.

$y=\frac{v_0\cdot\sin\alpha}{v_0\cdot\cos\alpha}\cdot x-\frac{g\cdot x^2}{2\cdot v_0^2\cdot\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot x-\frac{g\cdot x^2}{2\cdot v_0^2\cdot\cos^2\alpha}$

Einsetzen der Koordinaten des Punktes (30/3) und der Werte für $v_0=30\frac{m}{s}$ und $g=10\frac{m}{s^2}$:

$3=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot 30-\frac{10\cdot 900}{2\cdot 900\cdot\cos^2\alpha} \rightarrow 3=30\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{5}{\cos^2\alpha} \rightarrow 3\cdot\cos^2\alpha=30\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha-5$

Mit $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ gilt $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ und damit

$3\cdot\cos^2\alpha+5=30\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}\cdot\cos\alpha$

Substitution: $z=\cos\alpha$

Daraus folgt: $3\cdot z^2+5=30\cdot\sqrt{1-z^2}\cdot z \quad |()^2$

$9\cdot z^4+30\cdot z^2+25=900\cdot(1-z^2)\cdot z^2=900\cdot z^2-900\cdot z^4 \quad |-900\cdot z^2+900\cdot z^4$

$909\cdot z^4-870\cdot z^2+25=0$

Substitution: $w = z^2$

Daraus folgt: $909 \cdot w^2 - 870 \cdot w + 25 = 0 \quad |:909$

$w^2 - \frac{870}{909} \cdot w + \frac{25}{909} = 0$

$w^2 - \frac{290}{303} \cdot w + \frac{25}{909} = 0$

$w_{1,2} = \frac{145}{303} \pm \sqrt{\left(\frac{145}{303}\right)^2 - \frac{25}{909}} \approx 0{,}479 \pm \sqrt{0{,}229 - 0{,}028} = 0{,}479 \pm 0{,}449 \quad \rightarrow \quad w_1 = 0{,}927\,;\, w_2 = 0{,}030$

Da der Winkel zwischen 0° und 90° liegen muss, müssen die Werte von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ positiv sein und damit auch die z-Werte.

$z_1 = \sqrt{w_1} \approx 0{,}963 = \cos\alpha_1 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = 15{,}63\,°$

$z_2 = \sqrt{w_2} \approx 0{,}172 = \cos\alpha_2 \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = 80{,}08\,°$

Der Abschusswinkel muss also etwa zwischen 16° und 80° liegen.

Graphen der Grenz-Flugkurven:

$y_1 = \frac{\sin 15{,}63\,°}{\cos 15{,}63\,°} \cdot x - \frac{10 \cdot x^2}{2 \cdot 900 \cdot \cos^2 15{,}63\,°} = 0{,}28 \cdot x - 0{,}006 \cdot x^2$

$y_2 = \frac{\sin 80{,}08\,°}{\cos 80{,}08\,°} \cdot x - \frac{10 \cdot x^2}{2 \cdot 900 \cdot \cos^2 80{,}08\,°} = 5{,}72 \cdot x - 0{,}187 \cdot x^2$