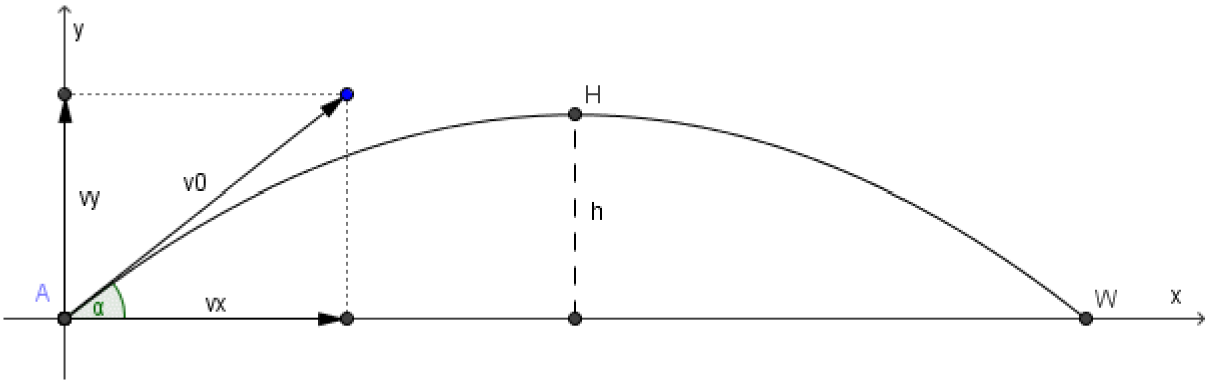
Schiefer Wurf - Beispielaufgabe



Ein Fußball wird vom Punkt A (Abstoß) aus mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α getreten.
Er erreicht im Punkt H (Höhe) seine größte Höhe und landet bei W (Weite) wieder auf dem Boden.
Der Ball sei punktförmig. Reibungseffekte sollen vernachlässigt werden.

Gegeben sind $v_0 = 20 \frac{m}{s}$; $\alpha = 30°$; $g = 10 \frac{m}{s^2}$
und die Bewegungsgleichungen $s = v \cdot t$; $v = const.$ für die geradlinig gleichförmige Bewegung und
$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$; $v = a \cdot t$; $a = const.$ für die beschleunigte Bewegung.

Gesucht sind h und der x-Wert des Punktes W.

Aufstellen der Bewegungsgleichungen:
In x-Richtung bewegt sich der Ball mit der konstanten Geschwindigkeit v_x: $x = v_x \cdot t$
In y-Richtung bewegt sich der Ball mit der konstanten Geschwindigkeit v_y nach oben und mit der
beschleunigten Bewegung mit der Beschleunigung g nach unten: $y = v_y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
Die Geschwindigkeit in y-Richtung berechnet sich entsprechend zu $v_{senkrecht} = v_y - g \cdot t$

Berechnung der maximalen Höhe:
Im Punkt H besitzt der Ball die Geschwindigkeit 0 in senkrechter Richtung: $v_{senkrecht} = 0$
Daraus folgt: $0 = v_y - g \cdot t_H \rightarrow t_H = \frac{v_y}{g}$
Einsetzen in $y = v_y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow y_H = \frac{v_y^2}{g} - \frac{v_y^2}{2 \cdot g} = \frac{v_y^2}{2 \cdot g}$
und Einsetzen in $x = v_x \cdot t \rightarrow x_H = \frac{v_x \cdot v_y}{g}$

Berechnung der maximalen Weite:

Im Punkt W besitzt der Ball die Höhe 0, d. h. $y_W=0$

Daraus folgt: $0=v_y \cdot t_W-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_W^2$

Da $t_W=0$ für den Abstoß gilt und deshalb hier uninteressant ist, darf man durch t_W dividieren:

$0=v_y-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_W \;\rightarrow\; t_W=\frac{2 \cdot v_y}{g}$

Einsetzen in $x=v_x \cdot t \;\rightarrow\; x_W=\frac{2 \cdot v_x \cdot v_y}{g}$

Im Vergleich der x-Werte erkennt man: $x_W=2 \cdot x_H$, d. h. der Ball erreicht nach genau der halben Flugstrecke das Maximum.

Das gilt nicht, wenn man den Luftwiderstand berücksichtigt!

Mit Hilfe der Winkelfunktionen lassen sich v_x und v_y berechnen:

$\cos\alpha=\frac{v_x}{v_0} \;\rightarrow\; v_x=v_0 \cdot \cos\alpha$ $\qquad$ $\sin\alpha=\frac{v_y}{v_0} \;\rightarrow\; v_y=v_0 \cdot \sin\alpha$

Damit ergeben sich folgende Lösungen:

maximale Höhe $y_H=\frac{v_y^2}{2 \cdot g}=\frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2 \cdot g}=\frac{400 \cdot \frac{1}{4}}{2 \cdot 10}\,m=5\,m$

in der Entfernung $x_H=\frac{v_x \cdot v_y}{g}=\frac{v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}=\frac{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}}{10}\,m=10 \cdot \sqrt{3}\,m \approx 17{,}3\,m$

maximale Weite $x_W=2 \cdot x_H=2 \cdot 10 \cdot \sqrt{3}\,m=20 \cdot \sqrt{3}\,m \approx 34{,}6\,m$

Anmerkung:

Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man die größte Höhe berechnen, wenn man weiß, dass an dieser Stelle der Graph der Flugkurve eine waagrechte Tangente hat. Die Bedingung lautet also: $y'=0$

$y'=v_y-g \cdot t \overset{!}{=} 0 \;\rightarrow\; t=\frac{v_y}{g}$, wie schon oben gezeigt.

Dahinter steckt natürlich die uns bekannte Beziehung $v_{senkrecht}=\dot{y}$

Der Ball erreicht nach einer Flugstrecke von etwa 17,3 m (auf dem Boden gemessen) die maximale Höhe 5 m und trifft nach einer Strecke von etwa 34,6 m wieder auf dem Boden auf.