Radioaktiver Zerfall - Entwicklung der Zerfallsformel

Näherungsweise gilt: Die Anzahl ΔN der Atome, die in dem Zeitraum Δt zerfallen, ist proportional zu der Anzahl N der vorhandenen Atome: $\frac{\Delta N}{\Delta t} \sim N$

Exakt gilt: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} \sim N$ oder $\dot{N}(t) \sim N(t)$ oder $\dot{N}(t) = -k \cdot N(t)$
Das Minuszeichen steht wegen des Zerfalls (Abnahme) da.

Gelöst werden muss nun die Differentialgleichung $\boxed{\dot{N}(t) = -k \cdot N(t)}$:

$$\frac{dN}{dt} = -k \cdot N$$

Trennung der Variablen: $\frac{1}{N} dN = -k \cdot dt$

Integrieren: $\int \frac{1}{N} dN = \int -k \cdot dt$

$$\ln|N| = -k \cdot t + const$$

N ist positiv: $N = e^{-k \cdot t + const}$

$$N = e^{const} \cdot e^{-k \cdot t}$$

wegen der Abhängigkeit von t: $N(t) = e^{const} \cdot e^{-k \cdot t}$

für t=0 gilt: $N(0) = e^{const} \cdot e^{0} = e^{const}$

also folgt: $\boxed{N(t) = N(0) \cdot e^{-k \cdot t}}$ k heißt Zerfallskonstante

Ersetzen von k durch die Halbwertzeit $T_{\frac{1}{2}}$:

$$N\left(T_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot N(0) = N(0) \cdot e^{-k \cdot T_{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-k \cdot T_{\frac{1}{2}}}$$

$$\ln \frac{1}{2} = -k \cdot T_{\frac{1}{2}} \rightarrow k = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{T_{\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}$$

Daraus folgt: $\boxed{N(t) = N(0) \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}} \cdot t}}$