Beispiel-Rechnungen zum zentralen elastischen Stoß

Zwei Kugeln der Massen m_1 und m_2 stoßen mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 zentral aufeinander. Nach dem Stoß haben die Kugeln ihre Masse behalten, aber die Geschwindigkeiten sind jetzt u_1 und u_2.

Geschwindigkeiten nach rechts werden positiv, Geschwindigkeiten nach links negativ bezeichnet.

Die Einheiten heben sich bei den verwendeten Gleichungen weg (warum wohl?), deshalb werden sie von Anfang an weggelassen.

Beim zentralen elastischen Stoß idealisiert man folgendermaßen: Reibung gibt es nicht. Die Körper drehen sich nicht, sondern gleiten reibungsfrei auf einer zur Erdoberfläche parallelen Fläche. Abgesehen vom Stoß, dessen genauer Verlauf immer aus den Betrachtungen ausgeschlossen wird, behalten die Körper ihre Richtung und Geschwindigkeit bei.

Zentrales Mittel zur Berechnung nicht bekannter Größen beim zentralen elastischen Stoß sind die Erhaltungssätze: *Impulserhaltungssatz und Energieerhaltungssatz*.

Impulserhaltungssatz (IES): $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$

Energieerhaltungssatz (EES): $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot {v_1}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot {v_2}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot {u_1}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot {u_2}^2$

Beispiel 1: gegeben sind: $m_1 = m_2 = m = 1kg$; $v_1 = 4m/s$; $v_2 = 0m/s$
gesucht sind: u_1 und u_2

Dann vereinfachen sich Impuls- und Energieerhaltungssatz zu:

IES: $1 \cdot 4 + 1 \cdot 0 = 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 \;\rightarrow\; 4 = u_1 + u_2 \quad [1]$

EES:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot {u_1}^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot {u_2}^2 \;\rightarrow\; 4^2 + 0^2 = {u_1}^2 + {u_2}^2 \;\rightarrow\; 16 = {u_1}^2 + {u_2}^2 \quad [2]$$

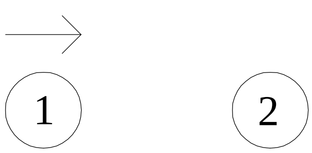
Aus [1] folgt $u_2 = 4 - u_1$ [3] und eingesetzt in [2] ergibt sich

$$16 = {u_1}^2 + (4 - u_1)^2 \;\rightarrow\; 16 = {u_1}^2 + 16 - 8 \cdot u_1 + {u_1}^2 \;\rightarrow\; 0 = 2 \cdot {u_1}^2 - 8 \cdot u_1 \;\rightarrow\; 0 = 2 \cdot u_1 \cdot (u_1 - 4)$$

Daraus folgen die Lösungen $u_{11} = 0$ und $u_{12} = 4$ In [3] eingesetzt ergeben sich die Werte $u_{21} = 4$ und $u_{22} = 0$.

Also: Entweder bleibt die erste Kugel stehen und gibt ihre Geschwindigkeit an die zweite Kugel weiter, oder die erste Kugel trifft nicht und fliegt mit konstanter Geschwindigkeit weiter, während die 2. Kugel in Ruhe liegen bleibt.

vorher:



nachher:

Beispiel 2: gegeben sind: $m_1=1kg$; $m_2=2kg$; $v_1=4m/s$; $v_2=0m/s$
gesucht sind: u_1 und u_2

Dann vereinfachen sich Impuls- und Energieerhaltungssatz zu:

IES: $1\cdot 4+2\cdot 0=1\cdot u_1+2\cdot u_2 \;\rightarrow\; 4=u_1+2u_2 \quad [1]$

EES:

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4^2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0^2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot u_1^{\,2}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot u_2^{\,2} \;\rightarrow\; 4^2+0^2=u_1^{\,2}+2\cdot u_2^{\,2} \;\rightarrow\; 16=u_1^{\,2}+2u_2^{\,2} \quad [2]$$

Aus [1] folgt: $u_1=4-2u_2 \quad [3]$ In [2] eingesetzt ergibt das:

$$16=(4-2u_2)^2+2u_2^{\,2} \;\rightarrow\; 16=16-16u_2+4u_2^{\,2}+2u_2^{\,2} \;\rightarrow\; 0=6u_2^{\,2}-16u_2 \;\rightarrow\; 0=u_2\cdot(6u_2-16)$$

Lösungen dieser Gleichung sind: $u_{21}=0$ und $u_{22}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$

In [3] eingesetzt ergibt sich $u_{11}=4$ und $u_{12}=4-\frac{16}{3}=\frac{12-16}{3}=-\frac{4}{3}$

Entweder fliegt also die erste Kugel mit unverminderter Geschwindigkeit weiter und die zweite Kugel bleibt liegen (die Kugeln treffen sich also nicht) oder
die erste Kugel fliegt mit der Geschwindigkeit 4/3m/s nach links (zurück) und die zweite Kugel fliegt in die andere Richtung mit 8/3m/s.

Beispiel 3 : Zwei Kugeln gleicher Masse stoßen zusammen.
Der Ort des Zusammenpralls und auch die vollständige Bewegung der zweiten Kugel ist hinter einer Wand verborgen.
Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der zweiten Kugel vor und nach dem Stoß.
gegeben sind $m=m_1=m_2=3kg$; $v_1=8m/s$; $u_1= -5m/s$

Dann vereinfachen sich Impuls- und Energieerhaltungssatz zu:

IES: $3\cdot 8+3\cdot v_2=3\cdot(-5)+3\cdot u_2 \;\rightarrow\; 8+v_2=-5+u_2 \quad [1]$

EES:

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8^2+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot v_2^{\,2}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(-5)^2+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot u_2^{\,2} \;\rightarrow\; 8^2+v_2^{\,2}=(-5)^2+u_2^{\,2} \;\rightarrow\; 64+v_2^{\,2}=25+u_2^{\,2} \quad [2]$$

Aus [1] folgt: $u_2=13+v_2 \quad [3]$ In [2] eingesetzt ergibt das:

$$64+v_2^{\,2}=25+(13+v_2)^2 \;\rightarrow\; 39+v_2^{\,2}=169+26v_2+v_2^{\,2} \;\rightarrow\; -130=26v_2 \;\rightarrow\; v_2=-\frac{130}{26}=-5$$

In [3] eingesetzt ergibt sich $u_2=13-5=8$

Die Kugeln haben also beim Stoß ihre Geschwindigkeiten „ausgetauscht“.

Beispiel 4: Nun eine Rechnung wie bei Beispiel 3, nur mit unterschiedlichen Massen: gegeben sind m_1=2kg ; m_2=7kg ; v_1=8m/s ; u_1= -5m/s

Dann vereinfachen sich Impuls- und Energieerhaltungssatz zu:

IES: $2 \cdot 8 + 7 \cdot v_2 = 2 \cdot (-5) + 7 \cdot u_2 \;\rightarrow\; 16 + 7 v_2 = -10 + 7 u_2 \;\rightarrow \frac{26}{7} + v_2 = u_2 \;\; [1]$

EES:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8^2 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot v_2{}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-5)^2 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot u_2{}^2 \;\rightarrow\; 128 + 7 v_2{}^2 = 50 + 7 u_2{}^2 \;\rightarrow\; \frac{78}{7} + v_2{}^2 = u_2{}^2 \;\; [2]$$

[1] in [2] eingesetzt ergibt: $\frac{78}{7} + v_2{}^2 = \left(\frac{26}{7} + v_2\right)^2 \;\rightarrow\; \frac{78}{7} + v_2{}^2 = \frac{676}{49} + \frac{52}{7} v_2 + v_2{}^2 \;\rightarrow$

$$\frac{546}{49} = \frac{676}{49} + \frac{52}{7} v_2 \;\rightarrow\; \frac{52}{7} v_2 = -\frac{130}{49} \;\rightarrow\; v_2 = -\frac{130 \cdot 7}{49 \cdot 52} = -\frac{5 \cdot 1}{7 \cdot 2} = -\frac{5}{14}$$

In [1] eingesetzt ergibt sich $u_2 = \frac{26}{7} - \frac{5}{14} = \frac{52-5}{14} = \frac{47}{14}$

Die nicht sichtbare Kugel kam also der ersten Kugel vor dem Stoß mit der Geschwindigkeit $-\frac{5}{14} \frac{m}{s}$ entgegen und entfernte sich nach dem Stoß mit $\frac{47}{14} \frac{m}{s}$.

Üben Sie bitte solche Aufgaben, indem Sie vier von den Größen m_1, m_2, v_1, v_2, u_1, u_2 auswählen und diesen Werte zuordnen. Die übrigen 2 Größen können Sie dann berechnen.
Achtung: Bei ungeeigneten Anfangsgrößen kann sich aber ggf. auch keine Lösung ergeben!

Oft ist es aufschlussreich, wenn man die Rechnungen allgemein und nicht mit bestimmten Zahlenwerten durchführt.

Für den Fall, dass der zweite Körper zu Beginn in Ruhe ist und die Geschwindigkeiten nach dem Stoß gesucht sind, soll das hier einmal exemplarisch vorgeführt werden:

Impulserhaltungssatz (IES): $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$ [1]

Energieerhaltungssatz (EES): $\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1{}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2{}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1{}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2{}^2$ [2]

Umformung von [1] ergibt bei Berücksichtigung von v_2=0:

$$m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot u_1 = m_2 \cdot u_2 \;\rightarrow\; u_2 = \frac{m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot u_1}{m_2} \qquad [3]$$

[2] wird zunächst mit 2 multipliziert, dann wird der u_2-Wert von [3] eingesetzt (außerdem v_2=0):

$$m_1 \cdot v_1{}^2 = m_1 \cdot u_1{}^2 + m_2 \cdot \left(\frac{m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot u_1}{m_2}\right)^2 \;\rightarrow$$

$$m_1 v_1{}^2 = m_1 u_1{}^2 + \frac{1}{m_2}\left(m_1{}^2 v_1{}^2 - 2 m_1{}^2 v_1 u_1 + m_1{}^2 u_1{}^2\right)$$

$$m_1 m_2 v_1^2 = m_1 m_2 u_1^2 + m_1^2 v_1^2 - 2 m_1^2 v_1 u_1 + m_1^2 u_1^2 \quad |:m_1$$

$$m_2 v_1^2 = m_2 u_1^2 + m_1 v_1^2 - 2 m_1 v_1 u_1 + m_1 u_1^2$$

$$(m_1 + m_2) \cdot u_1^2 - 2 m_1 v_1 \cdot u_1 + (m_1 - m_2) v_1^2 = 0$$

$$u_1^2 - \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} \cdot u_1 + \frac{(m_1 - m_2) v_1^2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$u_{1_{1,2}} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \pm \sqrt{\frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{(m_1 - m_2) v_1^2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2}} = \frac{m_1 v_1 \pm \sqrt{m_1^2 v_1^2 - m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_1^2}}{m_1 + m_2} =$$

$$\frac{m_1 v_1 \pm m_2 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1$$

Im Fall „+“ ergibt sich $u_1 = v_1$, im Fall „-“ ergibt sich $u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1$

In [3] eingesetzt folgt:

$u_2 = \frac{m_1 v_1 - m_1 v_1}{m_2} = 0$ für den Fall „+“ und im anderen Fall („-“):

$$u_2 = \frac{m_1 v_1 - m_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1}{m_2} = \frac{m_1^2 v_1 + m_1 m_2 v_1 - m_1^2 v_1 + m_1 m_2 v_1}{m_2 \cdot (m_1 + m_2)} = \frac{2 m_1 m_2 v_1}{m_2 \cdot (m_1 + m_2)} = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Der Fall „+“ ist uninteressant, weil die erste Kugel ihre Geschwindigkeit behält und die zweite Kugel liegen bleibt - die Kugeln treffen sich also nicht.

Im Fall „-“ treffen sich die Kugeln. Dann gilt für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$\boxed{u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \quad \text{und} \quad u_2 = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}}$ Nun lassen sich leicht folgende Sonder-Fälle behandeln:

a) $m_1 = m_2 = m \;\rightarrow\; u_1 = \frac{0}{2m} \cdot v_1 = 0 \;\; ; \;\; u_2 = \frac{2 m v_1}{2m} = v_1$, d.h. die erste Kugel bleibt liegen und die Geschwindigkeit „geht auf die zweite Kugel über“.

b) $m_1 \rightarrow \infty \;\Rightarrow\; u_1 \rightarrow \frac{m_1}{m_1} \cdot v_1 = v_1 \;\; ; \;\; u_2 \rightarrow \frac{2 m_1 v_1}{m_1} = 2 v_1$, wenn also die erste Kugel sehr viel schwerer als die zweite Kugel ist, wird sie mit fast unveränderter Geschwindigkeit weiterfliegen. Die zweite leichtere Kugel wird aber überraschenderweise nicht übermäßig schnell, sondern erlangt nur etwa die doppelte Geschwindigkeit der ersten Kugel.

c) $m_2 \rightarrow \infty \;\Rightarrow\; u_1 \rightarrow -\frac{m_2}{m_2} \cdot v_1 = -v_1 \;\; ; \;\; u_2 \rightarrow \frac{2 m_1 v_1}{m_2} \rightarrow 0$, wenn also die zweite Kugel sehr viel schwerer ist als die erste Kugel, wird die zweite Kugel einfach liegen bleiben, die erste Kugel dagegen nur ihre Richtung ändern, die Geschwindigkeit aber beibehalten (vergleichbar dem Abprallen eines Balles an einer sehr festen Mauer).