

## Aufgaben zum Themengebiet „Aufladen und Entladen eines Kondensators“

Theorie und nummerierte Formeln auf den Seiten 5 bis 8

- 1 Ein Kondensator mit der Kapazität  $C = 200\mu\text{F}$  wurde mit der Spannung  $U = 60\text{V}$  aufgeladen und wird nun über einen Widerstand von  $R = 10\text{M}\Omega$  entladen. Berechnen Sie die Ladung, die nach 1s abgeflossen ist.

*Lösung:*

*Ladung zur Zeit  $t=0$ : Wegen  $C = \frac{Q}{U}$  gilt  $Q(0) = C \cdot U(0) = 0,012\text{C}$*

*Ladung auf dem Kondensator zur Zeit 1s: [5]:  $Q(1\text{s}) = Q_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot 1\text{s}} = 0,011994001\text{C}$*

*Abgeflossene Ladung:  $Q_{\text{abgeflossen}} = Q(0\text{s}) - Q(1\text{s}) = 0,000005999\text{C} \approx 6 \cdot 10^{-6}\text{C}$*

---

- 2 Die Spannung am Kondensator, die man beim Entladen des Kondensators (Aufgabe 1) misst, sinkt mit der Zeit ab. Wie lange muss man warten, bis sich die Spannung am Kondensator halbiert hat?

*Lösung:*

*Formel [6]:  $U(T_{\frac{1}{2}}) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot T_{\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{U_0}{2} = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot T_{\frac{1}{2}}} \rightarrow R \cdot C \cdot \ln 2 = T_{\frac{1}{2}} = 1386\text{s} = 23\text{min } 6\text{s}$*

---

- 3 Man möchte, dass bei Aufgabe 2 die Halbwertszeit für die Spannung 1s beträgt. Wie groß müsste man den Widerstand wählen, damit sich dieses Ergebnis einstellen würde? Wenn man statt des Widerstandes die Kapazität des Kondensators ändern würde, welchen Wert müsste dann die Kapazität annehmen?

*Lösung: Mit Aufgabe 2 folgt:*

*Widerstand:  $R \cdot C \cdot \ln 2 = T_{\frac{1}{2}} \rightarrow R = \frac{T_{\frac{1}{2}}}{C \cdot \ln 2} = 7213\ \Omega$*

*Kapazität:  $R \cdot C \cdot \ln 2 = T_{\frac{1}{2}} \rightarrow C = \frac{T_{\frac{1}{2}}}{R \cdot \ln 2} = 1,44 \cdot 10^{-7}\text{F} = 144\text{nF}$*

---

- 4 Man misst während des Entladens (Werte aus Aufgabe 1) die Stromstärke im Stromkreis. Welchen Wert hat die Stromstärke zu Beginn des Entladevorgangs? Auf welchen Wert ist die Stromstärke nach 0,1s gesunken?

*Lösung:*

*Stromstärke zu Beginn:  $U = R \cdot I \rightarrow I(0) = \frac{U(0)}{R} = 6 \cdot 10^{-6}\text{A} = 6\ \mu\text{A}$*

*Stromstärke nach 0,1s: Formel [7]:  $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} \rightarrow I(0,1\text{s}) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot 0,1\text{s}} = 5,9997 \cdot 10^{-6}\text{A}$*

---

5 Nach dem vollständigen Entladen (siehe vorhergehende Aufgaben) wird der Kondensator wieder aufgeladen (Werte wie in Aufgabe 1).

a) Wie groß ist die Stromstärke zu Beginn des Aufladens?

Lösung:  $U = R \cdot I \rightarrow I(0) = \frac{U(0)}{R} = 6 \cdot 10^{-6} A = 6 \mu A$

b) Wann ist die Stromstärke des Ladestroms auf 1% abgefallen?

Lösung: Formel [7]:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} \rightarrow \frac{1}{100} = 1 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} \rightarrow t = R \cdot C \cdot \ln 100 = 9210 s = 153 \text{ min } 30 s = 2 \text{ h } 33 \text{ min } 30 s$$

c) Wann ist der Kondensator zu 99% aufgeladen?

Lösung: Formel [14]:  $Q(t) = Q_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}\right) \rightarrow 0,99 = 1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}\right) \rightarrow \frac{1}{100} = 1 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} \xrightarrow{\text{siehe b)}} 9210 s$

d) Welche Spannung herrscht am Kondensator nach 0,5s?

Lösung: Formel [12]:  $U(t) = U_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}\right) \xrightarrow{U_1 = U(0) = 60 V} U(0,5 s) = 14,998 \cdot 10^{-3} V \approx 0,015 mV$

e) Nach welcher Zeit ist die Stromstärke beim Aufladen auf die Hälfte abgesunken?

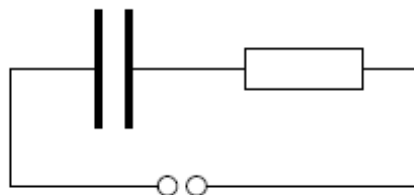
Lösung: Formel [10]:  $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} \rightarrow \frac{1}{2} = 1 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} \rightarrow R \cdot C \cdot \ln 2 = T_{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{siehe Aufgabe 2}}{=} 23 \text{ min } 6 s ,$

f) Nach welcher Zeit ist die Spannung am Kondensator beim Aufladen auf die Hälfte der Ladespannung angestiegen?

Lösung: Formel [12]:  $U(t) = U_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}\right) \rightarrow \frac{1}{2} = 1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}\right) \rightarrow R \cdot C \cdot \ln 2 = T_{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{siehe 2 und 5c}}{=} 23 \text{ min } 6 s$

g) Nach welcher Zeit ist die Ladung des Kondensators beim Aufladen auf die Hälfte der maximal erreichbaren Ladung angewachsen?

Lösung: Formel [14]:  $Q(t) = Q_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}\right) \rightarrow \frac{1}{2} = 1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}\right) \rightarrow R \cdot C \cdot \ln 2 = T_{\frac{1}{2}} = 23 \text{ min } 6 s$



## Aufgaben zum Themengebiet „Ausschalt- und Einschaltvorgang bei einer Spule“

Theorie und nummerierte Formeln auf den Seiten 9 bis 10

- 6 Eine Spule mit der Induktivität  $L = 200\text{H}$  und vernachlässigbarem ohmschen Widerstand liegt in einem Stromkreis mit der Spannung  $U = 60\text{V}$  und dem Gesamtwiderstand  $R = 600\Omega$ . Berechnen Sie die Stromstärke, die unmittelbar beim Abschalten des Stroms gemessen wird.

Lösung: gesucht ist die maximale Stromstärke:  $U = R \cdot I \rightarrow I(0) = \frac{U(0)}{R} = 0,1\text{A}$

- 7 Die Spannung an der Spule, die man beim Ausschalten des Stroms (Aufgabe 1) misst, sinkt mit der Zeit ab. Wie lange muss man warten, bis sich die Spannung an der Spule halbiert hat?

Lösung: Formel [17]:  $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \xrightarrow{U=R \cdot I} U(t) = U(0) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow \frac{1}{2} = 1 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow \frac{L}{R} \cdot \ln 2 = T_{\frac{1}{2}} = 0,231\text{s}$

- 8 Man möchte, dass bei Aufgabe 7 die Halbwertszeit für die Spannung 1s beträgt. Wie groß müsste man den Widerstand wählen, damit sich dieses Ergebnis einstellen würde? Wenn man statt des Widerstandes die Induktivität der Spule ändern würde, welchen Wert müsste dann die Induktivität annehmen?

Lösung: mit Aufgabe 7 folgt

Widerstand:  $\frac{L}{R} \cdot \ln 2 = 1\text{s} \rightarrow R = \frac{L \cdot \ln 2}{1\text{s}} = 138,6\Omega$

Kapazität:  $\frac{L}{R} \cdot \ln 2 = 1\text{s} \rightarrow L = \frac{R \cdot 1\text{s}}{\ln 2} = 865,6\text{H}$

- 9 Man misst während des Ausschaltens (Werte aus Aufgabe 1) die Stromstärke im Stromkreis. Auf welchen Wert ist die Stromstärke nach 0,1s gesunken?

Lösung: Formel [17]:  $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow I(0,1\text{s}) = I(0) \cdot e^{-\frac{R}{L}0,1\text{s}} = 0,074\text{A} = 74\text{mA}$

- 10 Nach dem beendeten Ausschaltvorgang (siehe vorhergehende Aufgaben) wird wieder die Spannung an die Spule gelegt (Werte wie in Aufgabe 1).

a) Wie groß ist die Stromstärke zu Beginn des Aufladens?

Lösung: Da zu Beginn die Induktionsspannung entgegengesetzt gleich zur angelegten Spannung ist, hat die Stromstärke den Wert  $I(0) = 0\text{A}$ .

b) Wann ist die Stromstärke auf 99% der Maximalstromstärke angestiegen?

Lösung: Formel [19]:

$$I(t) = I_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \rightarrow \frac{99}{100} = 1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \rightarrow \frac{1}{100} = e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow \frac{L}{R} \cdot \ln 100 = t = 1,535\text{s}$$

c) Welche Spannung herrscht an der Spule nach 0,5s?

Lösung: da die Spannung exponentiell abnimmt, gilt

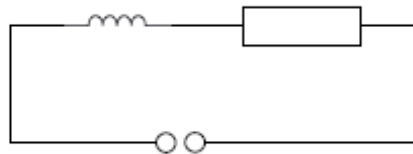
$$U(t) = U(0) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow U(0,5s) = U(0) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot 0,5s} = 13,39V$$

d) Nach welcher Zeit ist die Stromstärke auf die Hälfte des Endwertes angestiegen?

$$\text{Lösung: Formel [19]: } I(t) = I_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \rightarrow \frac{1}{2} = 1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}T_{\frac{1}{2}}}\right) \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{R}{L}T_{\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{L}{R} \cdot \ln 2 = T_{\frac{1}{2}} = 0,231s$$

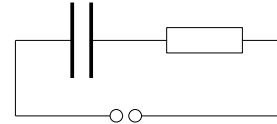
e) Nach welcher Zeit ist die Spannung an der Spule beim Einschalten auf die Hälfte der Quellenspannung abgefallen?

$$\text{Lösung: mit c) und d) gilt: } U(t) = U(0) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \rightarrow \frac{1}{2} = 1 \cdot e^{-\frac{R}{L}T_{\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{L}{R} \cdot \ln 2 = T_{\frac{1}{2}} = 0,231s$$



## Entladen und Aufladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand

Vorüberlegung



In einem seriellen Stromkreis addieren sich die Teilspannungen zur Gesamtspannung.

Bei einer Gesamtspannung  $U_{\text{ges}}$ , der Spannung  $U_C$  am Kondensator und der Spannung  $U_\Omega$  am Widerstand gilt also:  $U_{\text{ges}} = U_C + U_\Omega$ , wobei hier die Gesamtspannung eine konstante Gleichspannung  $U_1$  ist.

Aus der Definition für die Kapazität  $C$  folgt:  $C = \frac{Q}{U_C} \Rightarrow U_C = \frac{Q}{C}$

Für die Spannung am ohmschen Widerstand gilt  $U_\Omega = R \cdot I$

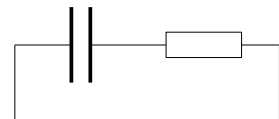
Zusammengefasst:  $U_1 = R \cdot I + \frac{Q}{C}$ ,

oder wenn die zeitliche Abhängigkeit gefragt ist  $U_1 = R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C}$  [1]

Stromstärke ist definiert als Ableitung der Ladung nach der Zeit:  $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$  [2]

[2] in [1] eingesetzt ergibt die Differentialgleichung  $U_1 = R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C}$  [3]

Entladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand



a) Berechnen der Ladung auf dem Kondensator in Abhängigkeit von der Zeit  $t$

Zunächst wird der Kondensator mit der konstanten Gleichspannung  $U_1$  aufgeladen.

Nach Entfernen der Spannungsquelle (d.h.  $U_1 = 0$ ) und Kurzschließen des Stromkreises entlädt sich der Kondensator über den Widerstand.

Mit der Bedingung  $U_1 = 0$  ändert sich [3] zu  $0 = R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} \stackrel{:R}{\Rightarrow} 0 = \dot{Q}(t) + \frac{1}{R \cdot C} \cdot Q(t)$  [4]

In den mathematischen Ergänzungen im Anhang wird gezeigt, dass die Differentialgleichung  $y' + a \cdot y = 0$  die Lösung  $y = y_0 \cdot e^{-a \cdot x}$  besitzt.

Setzt man  $y = Q(t)$ ,  $a = \frac{1}{R \cdot C}$  und  $x = t$ , so ergibt sich aus [4] die Lösung  $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$ . [5]

b) Berechnen der Spannung am Kondensator in Abhängigkeit von der Zeit  $t$

Ist  $U(t)$  die Spannung am Kondensator zur Zeit  $t$ , so gilt:

$U(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$  und mit der Spannung  $U_0 = \frac{Q_0}{C}$ , die zum Zeitpunkt  $t = 0$  am Kondensator

angelegen hat:  $U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$  [6]

c) Berechnen der Stromstärke im Stromkreis in Abhängigkeit von der Zeit  $t$

Es gilt  $I = \dot{Q}$ . Damit folgt aus Gleichung [5]:  $I(t) = \dot{Q}(t) = -\frac{Q_0}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t} = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t} = -I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}$  [7]

Kombiniert man die Gleichungen [6] und [7], so ergibt sich  $I(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t} = -\frac{U(t)}{R}$ .

Das Minuszeichen bedeutet, dass der Entladestrom entgegengesetzt gerichtet ist zum Aufladestrom, der den Kondensator mit der Spannung  $U_1$  geladen hat.

d) Zusammenfassung der Gesetze beim Entladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand

$$[5]: \quad Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}$$

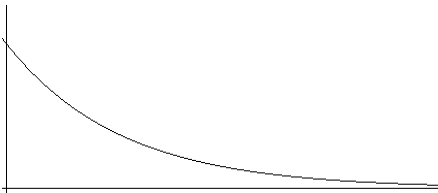
wobei  $Q_0$  die Ladung ist, die zu Beginn der Entladung auf dem Kondensator gespeichert ist.

$$[6]: \quad U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t},$$

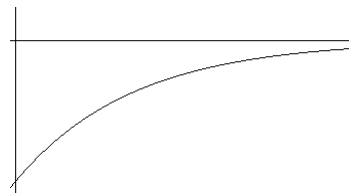
wobei  $U_0 = \frac{Q_0}{C}$  die Spannung ist, die zu Beginn der Entladung des Kondensators zwischen den Kondensatorplatten besteht.

$$[7]: \quad I(t) = -I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t},$$

wobei  $I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{Q_0}{R \cdot C}$  die Stromstärke ist, die zu Beginn der Entladung des Kondensators fließt.



prinzipieller Verlauf von  $Q(t)$  und  $U(t)$



prinzipieller Verlauf von  $I(t)$

e) Bedeutung der Konstante  $\tau = R \cdot C$  als „Zeitkonstante des RC-Gliedes“, Halbwertszeit

Zur Zeit  $t_1$  sei auf dem Kondensator die Ladung  $Q_1$ .

$t_2$  sei nun die Zeit, zu der auf dem Kondensator die Ladung  $Q_2$  vorhanden ist, die nur noch die Hälfte der Ladung  $Q_1$  beträgt.

Die Zeitspanne  $T_{\frac{1}{2}} = t_2 - t_1$ , die den Zeitraum von  $t_1$  bis  $t_2$  umfasst, soll nun berechnet werden.

$$Q_2 = \frac{1}{2} \cdot Q_1 = Q_1 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{1}{R \cdot C} T_{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\ln(\cdot)} \ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\frac{1}{R \cdot C} T_{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot T_{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Mit } \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \text{ gilt } -\ln 2 = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot T_{\frac{1}{2}} \stackrel{(-R \cdot C)}{\Rightarrow} R \cdot C \cdot \ln 2 = T_{\frac{1}{2}} \quad [8]$$

Man sieht, dass in [8] die Ladung nicht auftritt, d.h. dass die Zeit, in der der Kondensator die Hälfte seiner Ladung verliert, immer konstant ist, ganz gleich, wie viel Ladung sich gerade auf dem Kondensator befindet.

Diesen Zeitraum, der nur von der Größe des Widerstandes R und der Kapazität C abhängt, nennt man „Halbwertszeit“. Das Produkt  $\tau = R \cdot C$  nennt man Zeitkonstante des RC-Gliedes:  $T_{\frac{1}{2}} = \tau \cdot \ln 2 \approx R \cdot C \cdot 0,693$

Wegen der Strukturgleichheit der Formeln [5], [6] und [7] und der Unabhängigkeit der Formel [8] von der Ladung gilt die Größe der Halbwertszeit auch für die Spannung (Zeit, bis nur noch die Hälfte der Spannung vorhanden ist) und die Ladung (Zeit, bis nur noch die halbe Stromstärke gemessen wird).

### Aufladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand

a) Berechnen der Stromstärke des Stromes, mit dem der Kondensator abhängig von der Zeit t geladen wird

In Gleichung [3]:  $U_1 = R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C}$  ist  $U_1$  die Aufladespannung, die zeitlich konstant ist und einen Wert ungleich 0V besitzt.

Die Differentialgleichung besitzt außer Summanden, in denen die Ladung Q vorkommt, also auch einen konstanten Summanden. Differentialgleichungen z.B. der Art  $c = a \cdot y' + b \cdot y$  heißen inhomogene Differentialgleichungen (siehe mathematischer Anhang). Man kann sie lösen, indem man die Gleichung differenziert:

$$U_1 = R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} \stackrel{(\cdot)'}{\Rightarrow} 0 = R \cdot \ddot{Q}(t) + \frac{\dot{Q}(t)}{C} \stackrel{I=\dot{Q}}{\Rightarrow} 0 = R \cdot \dot{I}(t) + \frac{I(t)}{C} \stackrel{(\cdot)'}{\Rightarrow} 0 = \dot{I}(t) + \frac{1}{R \cdot C} \cdot I(t) \quad [9]$$

Die Gleichungen [4] und [9] haben dieselbe Struktur. Gleichung [9] ergibt sich aus Gleichung [4], wenn man Q durch I ersetzt. Also muss sich analog zu Gleichung [5] folgende Lösung ergeben:  $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$  [10]

Der Aufladestrom nimmt also im Lauf der Zeit gemäß einer e-Funktion ab.

b) Berechnen der Spannung, die abhängig von der Zeit am Kondensator anliegt

Zur Zeit  $t=0$  fließt die volle Stromstärke  $I(0)$  zum Kondensator und der Kondensator besitzt keine Ladung ( $Q=0$ ). In Gleichung [3] eingesetzt bedeutet das:

$$U_1 = R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} \Rightarrow U_1 = R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} \stackrel{t=0}{\Rightarrow} U_1 = R \cdot I(0) + \frac{Q(0)}{C} \stackrel{Q(0)=0}{\Rightarrow} U_1 = R \cdot I(0) \quad [11]$$

[10] und [11] eingesetzt in Gleichung [1]:  $U_1 = R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C}$  ergibt:

$$U_1 = R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} \Rightarrow R \cdot I(0) = R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} \stackrel{-R \cdot I(t)}{\Rightarrow} R \cdot I(0) - R \cdot I(t) = \frac{Q(t)}{C} \stackrel{\frac{Q(t)}{C} = U(t)}{\Rightarrow} R \cdot I(0) - R \cdot I(t) = U(t)$$

$$\stackrel{[10] \text{ einsetzen}}{\Rightarrow} U(t) = R \cdot I(0) - R \cdot I(0) \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} \stackrel{[11] \text{ einsetzen}}{\Rightarrow} U(t) = U_1 - U_1 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t} = U_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}\right) \quad [12]$$

c) Berechnen der Ladung, die sich abhängig von der Zeit auf dem Kondensator befindet

$$\text{Benutzt man in [12]: } U(t) = U_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}\right) \text{ die Beziehung } C = \frac{Q_1}{U_1} \Rightarrow U_1 = \frac{Q_1}{C}, \quad [13]$$

wobei  $Q_1$  die Ladung ist, die sich bei Anlegen der Spannung  $U_1$  am Kondensator auf dem Kondensator befindet (das wäre also die maximal mögliche Ladung auf dem Kondensator),

$$\text{so ergibt sich } U(t) = U_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}\right) \stackrel{[13]}{\Rightarrow} \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_1}{C} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}\right) \stackrel{|\cdot C}{\Rightarrow} Q(t) = Q_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}\right) \quad [14]$$

d) Zusammenfassung der Gesetze beim Aufladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand

$$[14]: \quad Q(t) = Q_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}\right)$$

wobei  $Q_1$  die Ladung ist, die maximal auf dem Kondensator gespeichert werden kann.

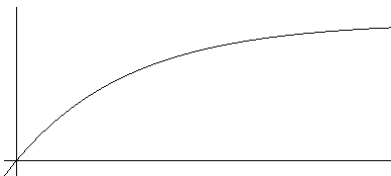
$$[12]: \quad U(t) = U_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}\right),$$

wobei  $U_1 = \frac{Q_1}{C}$  die Spannung ist, die maximal am Kondensator anliegen kann.

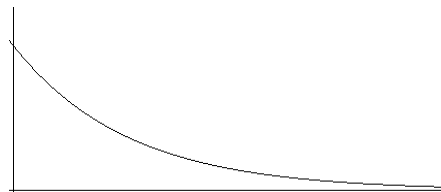
$$[10]: \quad I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t},$$

wobei  $I_0 = \frac{U_1}{R} = \frac{Q_1}{R \cdot C}$  die Stromstärke ist, die zu Beginn der Aufladung des Kondensators fließt.

$I_0$  ist die größtmögliche Stromstärke während des Aufladevorganges.

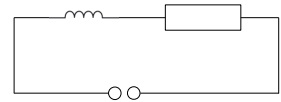


prinzipieller Verlauf für  $Q(t)$  und  $U(t)$



prinzipieller Verlauf für  $I(t)$

# Ausschalt- und Einschaltvorgang bei einer Spule



## Vorüberlegung

Eine Spule hat den ohmschen Widerstand  $R$  und die Induktivität  $L$ . Für die folgende Rechnung stellt man sich vor, die Spule selbst habe keinen Widerstand. Dafür sei aber ein entsprechend großer Widerstand mit der Spule in Reihe geschaltet.

Die am Widerstand anliegende Spannung  $U(t)$  setzt sich zusammen aus der angelegten Spannung  $U_1$  und der dieser entgegengesetzt wirkenden Induktionsspannung  $U_{ind}$  zu  $U(t) = U_1 + U_{ind}$ .

Aufgelöst nach  $U_1$  ergibt sich mit  $U_{ind} = -L \cdot \dot{I}$  die Gleichung  $U_1 = U(t) - U_{ind} = U(t) + L \cdot \dot{I}$ .

Da  $U(t) = R \cdot I(t)$ , kann man auch schreiben:  $U_1 = R \cdot I(t) + L \cdot \dot{I} \stackrel{:R}{\Rightarrow} \frac{1}{R} \cdot U_1 = I(t) + \frac{L}{R} \cdot \dot{I} \Rightarrow$

$$\frac{1}{R} \cdot U_1 = \frac{L}{R} \cdot \dot{I} + I(t) \tag{15}$$

Formt man die Gleichung [1] um zu  $U_1 = R \cdot I(t) + \frac{Q(t)}{C} = R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} \stackrel{:C}{\Rightarrow} C \cdot U_1 = R \cdot C \cdot \dot{Q} + Q(t)$ , [16]

so erkennt man die Strukturgleichheit der Gleichungen [15] und [16].

Gegenüberstellung der Gleichungen und entsprechender Größen:

allgemein	Kondensator	Spule
$a \cdot u = b \cdot y' + y$	$C \cdot U_1 = R \cdot C \cdot \dot{Q} + Q(t)$	$\frac{1}{R} \cdot U_1 = \frac{L}{R} \cdot \dot{I} + I(t)$
$y$	$Q(t)$	$I(t)$
$a$	$C$	$\frac{1}{R}$
$b$	$R \cdot C$	$\frac{L}{R}$
$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{R \cdot C}$	$\frac{R}{L}$

Werden nun die Anfangsbedingungen beachtet, können durch Ersetzen der einzelnen Größen die Formeln für das Entladen und Aufladen des Kondensators übertragen werden auf den Ausschaltvorgang und den Einschaltvorgang bei einer Spule:

### a) Ausschaltvorgang bei einer Spule

Die Stromstärke zur Zeit  $t=0$  beträgt  $I(0) = I_0$ . Das entspricht der Ladung  $Q(0) = Q_0$  beim Entladen eines Kondensators.

Für das Ausschalten einer Spule ergibt sich die Gleichung für die Stromstärke durch entsprechendes Ersetzen:

Formel beim Kondensator:  $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$       Formel bei der Spule:  $I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$  [17]

Genau so, wie es beim Kondensator eine Halbwertzeit gibt, nach der jeweils nur noch die Hälfte der Ladung auf dem Kondensator vorhanden ist, gibt es hier eine Halbwertzeit, zu der jeweils nur noch die Hälfte der Stromstärke gemessen wird.

Formel beim Kondensator:  $T_{\frac{1}{2}} = R \cdot C \cdot \ln 2$

Formel bei der Spule:  $T_{\frac{1}{2}} = \frac{L}{R} \cdot \ln 2$  [18]

a) *Einschaltvorgang bei einer Spule*

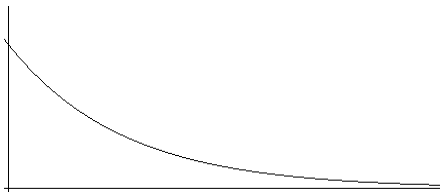
Die Stromstärke zur Zeit  $t=0$  beträgt  $I(0)=0 A$ . Das entspricht der Ladung  $Q(0)=0 C$  beim Laden eines Kondensators.

Für das Einschalten einer Spule ergibt sich die Gleichung für die Stromstärke durch entsprechendes Ersetzen:

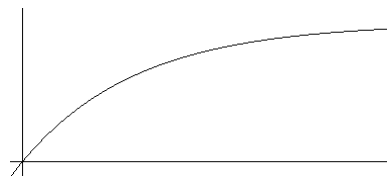
Formel beim Kondensator:  $Q(t) = Q_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

Formel bei der Spule:  $I(t) = I_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$  [19]

$I_1$  ist die maximale mögliche Stromstärke.



prinzipieller Verlauf für  $I(t)$  beim Ausschalten



prinzipieller Verlauf für  $I(t)$  beim Einschalten

## Mathematische Ergänzungen

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \stackrel{\text{Substitution}}{=} \int \frac{f'(x)}{z} \cdot \frac{1}{f'(x)} dz = \int \frac{1}{z} dz = \ln|z| = \ln|f(x)|$$

$$\text{Substitution: } f(x)=z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = f'(x) \Rightarrow dx = \frac{1}{f'(x)} dz$$

---

Lösung der homogenen Differentialgleichung  $y' + a \cdot y = 0$  mit  $y$  als Funktion von  $x$

$$y' + a \cdot y = 0 \stackrel{:\cdot y^{-1}}{\Rightarrow} y' = -a \cdot y \stackrel{:\cdot y^{-1}}{\Rightarrow} \frac{y'}{y} = -a \stackrel{\int}{\Rightarrow} \int \frac{y'}{y} dx = \int -a dx \stackrel{\text{s.o.}}{\Rightarrow} \ln y = -a \cdot x + c \stackrel{e^{\cdot}}{\Rightarrow} y = e^{-a \cdot x + c} \Rightarrow$$

$$y = e^{-a \cdot x} \cdot e^c = c_0 \cdot e^{-a \cdot x} \text{ mit } c_0 = e^c$$

Also ist  $y = c_0 \cdot e^{-a \cdot x}$  eine Lösung der Differentialgleichung  $y' + a \cdot y = 0$ .

---

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung  $c = a \cdot y' + b \cdot y$  mit  $y$  als Funktion von  $x$

$$c = a \cdot y' + b \cdot y \stackrel{(\cdot)'}{\Rightarrow} 0 = a \cdot y'' + b \cdot y' \stackrel{:\cdot a^{-1}}{\Rightarrow} 0 = y'' + \frac{b}{a} \cdot y' \stackrel{-\frac{b}{a} \cdot y'}{\Rightarrow} -\frac{b}{a} \cdot y' = y'' \stackrel{:\cdot y'}{\Rightarrow} -\frac{b}{a} = \frac{y''}{y'} \stackrel{\int}{\Rightarrow}$$

$$\int -\frac{b}{a} dx = \int \frac{y''}{y'} dx \Rightarrow -\frac{b}{a} \cdot x + d_1 = \ln|y'| \stackrel{e^{\cdot}}{\Rightarrow} e^{-\frac{b}{a} \cdot x + d_1} = y' \stackrel{\int}{\Rightarrow} \int e^{-\frac{b}{a} \cdot x + d_1} dx = \int y' dx \Rightarrow$$

$$-\frac{a}{b} \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x + d_1} + d_2 = y$$

Einsetzen von  $y$  und  $y'$  in die Differentialgleichung liefert

$$c = a \cdot y' + b \cdot y = a \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x + d_1} + b \cdot \left( -\frac{a}{b} \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x + d_1} + d_2 \right) = a \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x + d_1} - a \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x + d_1} + b \cdot d_2 = b \cdot d_2$$

Die Integrationskonstante  $d_1$  kann beliebig gewählt werden, also auch z.B.  $d_1 = 0$ , für die

Integrationskonstante  $d_2$  muss man wählen  $d_2 = \frac{c}{b}$ .

Lösung der Differentialgleichung ist also (mit  $d_1 = 0$ ):  $y = -\frac{a}{b} \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x} + \frac{c}{b}$