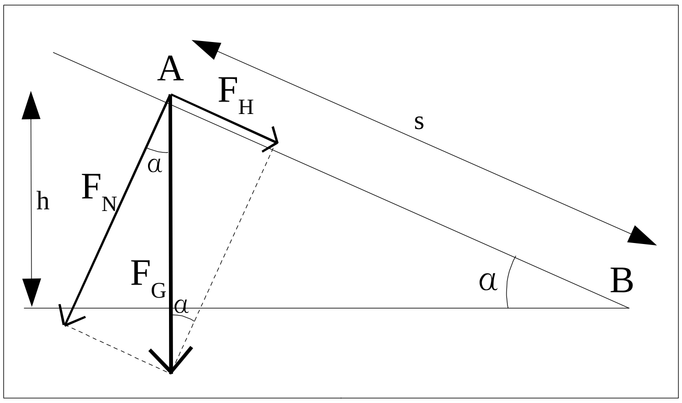
Die schiefe Ebene



Ein Körper befinde sich bei A auf einer schiefen Ebene zunächst in Ruhe.
Auf Grund der Gewichtskraft F_G wird er mit der Hangabtriebskraft F_H auf der schiefen Ebene so beschleunigt, dass er reibungsfrei mit der Geschwindigkeit v am Punkt B ankommt.
Mit der Normalkraft F_N wird er während des Rutschens auf die schiefe Ebene gedrückt.

Zwischen den Kräften und dem Neigungswinkel α gelten dabei folgende Beziehungen:

$$\sin\alpha = \frac{F_H}{F_G} = \frac{m \cdot a_H}{m \cdot g} = \frac{a_H}{g} \qquad \text{und} \qquad \cos\alpha = \frac{F_N}{F_G} = \frac{m \cdot a_N}{m \cdot g} = \frac{a_N}{g}$$

Dabei ist $a_H = g \cdot \sin\alpha$ die Beschleunigung, mit der der Körper entlang der schiefen Ebene beschleunigt wird.

Aufgabe: Berechnen Sie die Geschwindigkeit v des Körpers am Punkt B

1. Berechnung mit den Bewegungsgleichungen

Da eine gleichförmig beschleunigte Bewegung vorliegt, gelten die Bewegungsgleichungen

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad \text{und} \quad v = a \cdot t \quad \text{mit} \quad a = a_H \ .$$

Die Länge s erhält man aus h mit Hilfe des Winkels α zu $\sin\alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow s = \frac{h}{\sin\alpha}$.

Also gilt: $v = a \cdot t = a_H \cdot t = g \cdot \sin\alpha \cdot t$. Den Wert für t erhält man aus der Gleichung mit s:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a_H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g \cdot \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{h}{\sin\alpha}}{g \cdot \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot \sin^2\alpha}}$$

Also gilt: $v = g \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot \sin^2\alpha}} = g \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

2. Berechnung mit dem Energieerhaltungssatz

Die Energien W_A im Punkt A und W_B im Punkt B müssen gleich sein.

Wird die Höhe vom Punkt B aus gemessen, hat der Körper bei A nur potentielle und bei B nur kinetische Energie.

Also gilt: $W_A = m \cdot g \cdot h$ und $W_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ und wegen $W_A = W_B$ auch

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v^2 \Rightarrow 2 \cdot g \cdot h = v^2 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = v$$

Das gleiche Ergebnis erhält man also mit dem Energieerhaltungssatz viel einfacher.

Außerdem erkennt man, dass der Winkel α bei der Berechnung grundsätzlich keine Rolle spielt, die Geschwindigkeit ist also für jeden Winkel gleich groß.