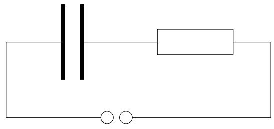
Entladen und Aufladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand



Vorüberlegung

In einem seriellen Stromkreis addieren sich die Teilspannungen zur Gesamtspannung.

Bei einer Gesamtspannung U_{ges}, der Spannung U_C am Kondensator und der Spannung U_Ω am Widerstand gilt also: $U_{ges}=U_C+U_\Omega$, wobei hier die Gesamtspannung eine konstante Gleichspannung U_1 ist .

Aus der Definition für die Kapazität C folgt: $C=\frac{Q}{U_C} \Rightarrow U_C=\frac{Q}{C}$

Für die Spannung am ohmschen Widerstand gilt $U_\Omega=R\cdot I$

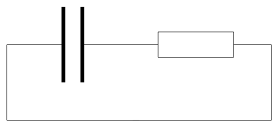
Zusammengefasst: $U_1=R\cdot I+\frac{Q}{C}$,

oder wenn die zeitliche Abhängigkeit gefragt ist $U_1=R\cdot I(t)+\frac{Q(t)}{C}$ [1]

Stromstärke ist definiert als Ableitung der Ladung nach der Zeit: $I=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{dQ}{dt}=\dot{Q}$ [2]

[2] in [1] eingesetzt ergibt die Differentialgleichung $U_1=R\cdot\dot{Q}(t)+\frac{Q(t)}{C}$ [3]

Entladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand



a) Berechnen der Ladung auf dem Kondensator in Abhängigkeit von der Zeit t

Zunächst wird der Kondensator mit der konstanten Gleichspannung U_1 aufgeladen.

Nach Entfernen der Spannungsquelle (d.h. $U_1=0$) und Kurzschließen des Stromkreises entlädt sich der Kondensator über den Widerstand.

Mit der Bedingung $U_1=0$ ändert sich [3] zu $0=R\cdot\dot{Q}(t)+\frac{Q(t)}{C} \overset{:R}{\Rightarrow} 0=\dot{Q}(t)+\frac{1}{R\cdot C}\cdot Q(t)$ [4]

In den mathematischen Ergänzungen im Anhang wird gezeigt, dass die Differentialgleichung $y'+a\cdot y=0$ die Lösung $y=y_0\cdot e^{-a\cdot x}$ besitzt.

Setzt man $y=Q(t)$, $a=\frac{1}{R\cdot C}$ und $x=t$, so ergibt sich aus [4] die Lösung $Q(t)=Q_0\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}$. [5]

b) Berechnen der Spannung am Kondensator in Abhängigkeit von der Zeit t

Ist $U(t)$ die Spannung am Kondensator zur Zeit t, so gilt:

$U(t)=\frac{Q(t)}{C}=\frac{Q_0}{C}\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}$ und mit der Spannung $U_0=\frac{Q_0}{C}$, die zum Zeitpunkt $t=0$ am Kondensator angelegen hat: $U(t)=U_0\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}t}$ [6]

c) Berechnen der Stromstärke im Stromkreis in Abhängigkeit von der Zeit t

Es gilt $I=\dot{Q}$. Damit folgt aus Gleichung [5]: $I(t)=\dot{Q}(t)=-\frac{Q_0}{R\cdot C}\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}=-\frac{U_0}{R}\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}=-I_0\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}$ [7]

Kombiniert man die Gleichungen [6] und [7], so ergibt sich $I(t)=-\frac{U_0}{R}\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}=-\frac{U(t)}{R}$.

Das Minuszeichen bedeutet, dass der Entladestrom entgegengesetzt gerichtet ist zum Aufladestrom, der den Kondensdator mit der Spannung U_1 geladen hat.

d) Zusammenfassung der Gesetze beim Entladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand

$$[5]: \quad Q(t)=Q_0\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}$$

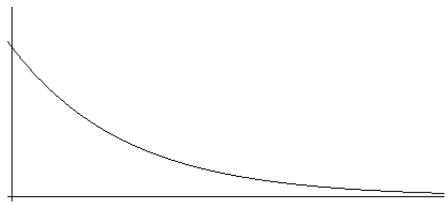
wobei Q_0 die Ladung ist, die zu Beginn der Entladung auf dem Kondensator gespeichert ist.

$$[6]: \quad U(t)=U_0\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t} ,$$

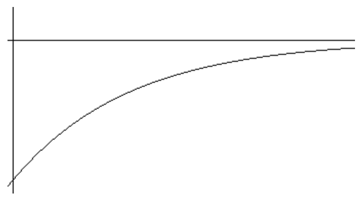
wobei $U_0=\frac{Q_0}{C}$ die Spannung ist, die zu Beginn der Entladung des Kondensators zwischen den Kondensatorplatten besteht.

$$[7]: \quad I(t)=-I_0\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t} ,$$

wobei $I_0=\frac{U_0}{R}=\frac{Q_0}{R\cdot C}$ die Stromstärke ist, die zu Beginn der Entladung des Kondensators fließt.



prinzipieller Verlauf von $Q(t)$ und $U(t)$



prinzipieller Verlauf von $I(t)$

e) Bedeutung der Konstante $\tau=R\cdot C$ als „Zeitkonstante des RC-Gliedes“, Halbwertzeit

Zur Zeit t_1 sei auf dem Kondensator die Ladung Q_1 .

t_2 sei nun die Zeit, zu der auf dem Kondensator die Ladung Q_2 vorhanden ist, die nur noch die Hälfte der Ladung Q_1 beträgt.

Die Zeitspanne $T_{\frac{1}{2}}=t_2-t_1$, die den Zeitraum von t_1 bis t_2 umfasst, soll nun berechnet werden.

$$Q_2=\frac{1}{2}\cdot Q_1=Q_1\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot T_{\frac{1}{2}}} \overset{:Q_1}{\Rightarrow} \frac{1}{2}=e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot T_{\frac{1}{2}}} \overset{\ln()}{\Rightarrow} \ln\frac{1}{2}=\ln e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot T_{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{R\cdot C}\cdot T_{\frac{1}{2}}$$

Mit $\ln\frac{1}{2}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$ gilt $-\ln 2=-\frac{1}{R\cdot C}\cdot T_{\frac{1}{2}} \overset{\cdot(-R\cdot C)}{\Rightarrow} R\cdot C\cdot\ln 2=T_{\frac{1}{2}}$ [8]

Man sieht, dass in [8] die Ladung nicht auftritt, d.h. dass die Zeit, in der der Kondensator die Hälfte seiner Ladung verliert, immer konstant ist, ganz gleich, wie viel Ladung sich gerade auf dem Kondenstor befindet.

Diesen Zeitraum, der nur von der Größe des Widerstandes R und der Kapazität C abhängt, nennt man „Halbwertzeit". Das Produkt $\tau=R\cdot C$ nennt man Zeitkonstante des RC-Gliedes: $T_{\frac{1}{2}}=\tau\cdot\ln 2\approx R\cdot C\cdot 0{,}693$

Wegen der Strukturgleichheit der Formeln [5], [6] und [7] und der Unabhängigkeit der Formel [8] von der Ladung gilt die Größe der Halbwertzeit auch für die Spannung (Zeit, bis nur noch die Hälfte der Spannung vorhanden ist) und die Ladung (Zeit, bis nur noch die halbe Stromstärke gemessen wird).

Aufladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand

a) Berechnen der Stromstärke des Stromes, mit dem der Kondensator abhängig von der Zeit t geladen wird

In Gleichung [3]: $U_1=R\cdot\dot{Q}(t)+\frac{Q(t)}{C}$ ist U_1 die Aufladespannung, die zeitlich konstant ist und einen Wert ungleich 0V besitzt.

Die Differentialgleichung besitzt außer Summanden, in denen die Ladung Q vorkommt, also auch einen konstanten Summanden. Differentialgleichungen z.B. der Art $c=a\cdot y'+b\cdot y$ heißen inhomogene Differentialgleichungen (siehe mathematischer Anhang). Man kann sie lösen, indem man die Gleichung differenziert:

$$U_1=R\cdot\dot{Q}(t)+\frac{Q(t)}{C} \overset{()'}{\Rightarrow} 0=R\cdot\ddot{Q}(t)+\frac{\dot{Q}(t)}{C} \overset{I=\dot{Q}}{\Rightarrow} 0=R\cdot\dot{I}(t)+\frac{I(t)}{C} \overset{:R}{\Rightarrow} 0=\dot{I}(t)+\frac{1}{R\cdot C}\cdot I(t) \qquad [9]$$

Die Gleichungen [4] und [9] haben dieselbe Struktur. Gleichung [9] ergibt sich aus Gleichung [4], wenn man Q durch I ersetzt. Also muss sich analog zu Gleichung [5] folgende Lösung ergeben: $I(t)=I_0\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}$ [10]

Der Aufladestrom nimmt also im Lauf der Zeit gemäß einer e-Funktion ab.

b) Berechnen der Spannung, die abhängig von der Zeit am Kondensator anliegt

Zur Zeit $t=0$ fließt die volle Stromstärke $I(0)$ zum Kondensator und der Kondensator besitzt keine Ladung ($Q=0$). In Gleichung [3] eingesetzt bedeutet das:

$$U_1=R\cdot\dot{Q}(t)+\frac{Q(t)}{C} \Rightarrow U_1=R\cdot I(t)+\frac{Q(t)}{C} \overset{t=0}{\Rightarrow} U_1=R\cdot I(0)+\frac{Q(0)}{C} \overset{Q(0)=0}{\Rightarrow} U_1=R\cdot I(0) \qquad [11]$$

[10] und [11] eingesetzt in Gleichung [1]: $U_1=R\cdot I(t)+\frac{Q(t)}{C}$ ergibt:

$$U_1=R\cdot I(t)+\frac{Q(t)}{C} \Rightarrow R\cdot I(0)=R\cdot I(t)+\frac{Q(t)}{C} \overset{-R\cdot I(t)}{\Rightarrow} R\cdot I(0)-R\cdot I(t)=\frac{Q(t)}{C} \overset{\frac{Q(t)}{C}=U(t)}{\Rightarrow} R\cdot I(0)-R\cdot I(t)=U(t)$$

$$\overset{[10]\,einsetzen}{\Rightarrow} U(t)=R\cdot I(0)-R\cdot I(0)\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t} \overset{[11]\,einsetzen}{\Rightarrow} U(t)=U_1-U_1\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}=U_1\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}\right) \qquad [12]$$

c) Berechnen der Ladung, die sich abhängig von der Zeit auf dem Kondensator befindet

Benutzt man in [12]: $U(t)=U_1\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}\right)$ die Beziehung $C=\frac{Q_1}{U_1} \Rightarrow U_1=\frac{Q_1}{C}$, [13]

wobei Q_1 die Ladung ist, die sich bei Anliegen der Spannung U_1 am Kondensator auf dem Kondensator befindet (das wäre also die maximal mögliche Ladung auf dem Kondensator),

so ergibt sich $U(t)=U_1\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}\right) \overset{[13]}{\Rightarrow} \frac{Q(t)}{C}=\frac{Q_1}{C}\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}\right) \overset{\cdot C}{\Rightarrow} Q(t)=Q_1\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}\right)$ [14]

d) Zusammenfassung der Gesetze beim Aufladen eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand

$$[14]:\quad Q(t)=Q_1\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}\right)$$

wobei Q_1 die Ladung ist, die maximal auf dem Kondensator gespeichert werden kann.

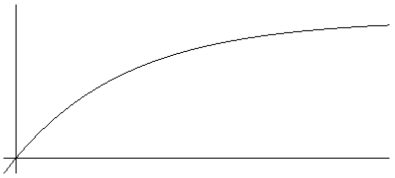
$$[12]:\quad U(t)=U_1\left(1-e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}\right),$$

wobei $U_1=\frac{Q_1}{C}$ die Spannung ist, die maximal am Kondensator anliegen kann.

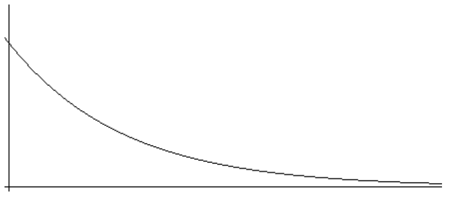
$$[10]:\quad I(t)=I_0\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t},$$

wobei $I_0=\frac{U_1}{R}=\frac{Q_1}{R\cdot C}$ die Stromstärke ist, die zu Beginn der Aufladung des Kondensators fließt.

I_0 ist die größtmögliche Stromstärke während des Aufladevorganges.

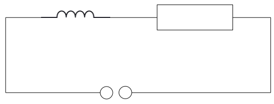


prinzipieller Verlauf für $Q(t)$ und $U(t)$



prinzipieller Verlauf für $I(t)$

Ausschalt- und Einschaltvorgang bei einer Spule



Vorüberlegung

Eine Spule hat den ohmschen Widerstand R und die Induktivität L. Für die folgende Rechnung stellt man sich vor, die Spule selbst habe keinen Widerstand. Dafür sei aber ein entsprechend großer Widerstand mit der Spule in Reihe geschaltet.

Die am Widerstand anliegende Spannung $U(t)$ setzt sich zusammen aus der angelegten Spannung U_1 und der dieser entgegengesetzt wirkenden Induktionsspannung U_{ind} zu $U(t)=U_1+U_{ind}$.

Aufgelöst nach U_1 ergibt sich mit $U_{ind}=-L\cdot\dot{I}$ die Gleichung $U_1=U(t)-U_{ind}=U(t)+L\cdot\dot{I}$.

Da $U(t)=R\cdot I(t)$, kann man auch schreiben: $U_1=R\cdot I(t)+L\cdot\dot{I} \overset{:R}{\Rightarrow} \frac{1}{R}\cdot U_1=I(t)+\frac{L}{R}\cdot\dot{I} \Rightarrow$

$$\frac{1}{R}\cdot U_1=\frac{L}{R}\cdot\dot{I}+I(t) \qquad [15]$$

Formt man die Gleichung [1] um zu $U_1=R\cdot I(t)+\frac{Q(t)}{C}=R\cdot\dot{Q}(t)+\frac{Q(t)}{C} \overset{\cdot C}{\Rightarrow} C\cdot U_1=R\cdot C\cdot\dot{Q}+Q(t)$, [16]

so erkennt man die Strukturgleichheit der Gleichungen [15] und [16].

Gegenüberstellung der Gleichungen und entsprechender Größen:

allgemein	Kondensator	Spule
$a\cdot u=b\cdot y'+y$	$C\cdot U_1=R\cdot C\cdot\dot{Q}+Q(t)$	$\frac{1}{R}\cdot U_1=\frac{L}{R}\cdot\dot{I}+I(t)$
y	$Q(t)$	$I(t)$
a	C	$\frac{1}{R}$
b	$R\cdot C$	$\frac{L}{R}$
$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{R\cdot C}$	$\frac{R}{L}$

Werden nun die Anfangsbedingungen beachtet, können durch Ersetzen der einzelnen Größen die Formeln für das Entladen und Aufladen des Kondensators übertragen werden auf den Ausschaltvorgang und den Einschaltvorgang bei einer Spule:

a) Ausschaltvorgang bei einer Spule

Die Stromstärke zur Zeit $t=0$ beträgt $I(0)=I_0$. Das entspricht der Ladung $Q(0)=Q_0$ beim Entladen eines Kondensators.

Für das Ausschalten einer Spule ergibt sich die Gleichung für die Stromstärke durch entsprechendes Ersetzen:

Formel beim Kondensator: $Q(t)=Q_0\cdot e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}$ Formel bei der Spule: $I(t)=I_0\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$ [17]

Genau so, wie es beim Kondensator eine Halbwertzeit gibt, nach der jeweils nur noch die Hälfte der Ladung auf dem Kondensator vorhanden ist, gibt es hier eine Halbwertzeit, zu der jeweils nur noch die Hälfte der Stromstärke gemessen wird.

Formel beim Kondensator: $T_{\frac{1}{2}}=R\cdot C\cdot\ln 2$ Formel bei der Spule: $T_{\frac{1}{2}}=\frac{L}{R}\cdot\ln 2$ [18]

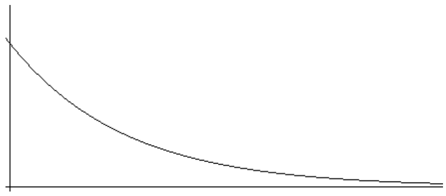
a) Einschaltvorgang bei einer Spule

Die Stromstärke zur Zeit $t=0$ beträgt $I(0)=0\,A$. Das entspricht der Ladung $Q(0)=0\,C$ beim Laden eines Kondensators.

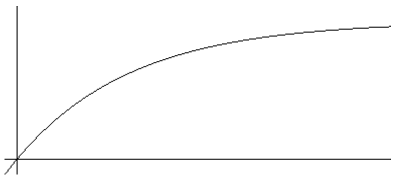
Für das Einschalten einer Spule ergibt sich die Gleichung für die Stromstärke durch entsprechendes Ersetzen:

Formel beim Kondensator: $Q(t)=Q_1\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{R\cdot C}\cdot t}\right)$ Formel bei der Spule: $I(t)=I_1\cdot\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)$ [19]

I_1 ist die maximale mögliche Stromstärke.



prinzipieller Verlauf für $I(t)$ beim Ausschalten



prinzipieller Verlauf für I(t) beim Einschalten

Mathematische Ergänzungen

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx \overset{Substitution}{=} \int \frac{f'(x)}{z}\cdot\frac{1}{f'(x)}dz = \int \frac{1}{z}dz = \ln|z| = \ln|f(x)|$$

Substitution: $f(x)=z \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx}=f'(x) \;\Rightarrow\; dx=\frac{1}{f'(x)}dz$

Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'+a\cdot y=0$ *mit y als Funktion von x*

$$y'+a\cdot y=0 \overset{-a\cdot y}{\Rightarrow} y'=-a\cdot y \overset{:y}{\Rightarrow} \frac{y'}{y}=-a \overset{\int}{\Rightarrow} \int \frac{y'}{y}dx=\int -a\,dx \overset{s.o.}{\Rightarrow} \ln y=-a\cdot x+c \overset{e^{()}}{\Rightarrow} y=e^{-a\cdot x+c} \Rightarrow$$

$$y=e^{-a\cdot x}\cdot e^{c}=c_0\cdot e^{-a\cdot x} \text{ mit } c_0=e^{c}$$

Also ist $y=c_0\cdot e^{-a\cdot x}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'+a\cdot y=0$.

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $c=a\cdot y'+b\cdot y$ *mit y als Funktion von x*

$$c=a\cdot y'+b\cdot y \overset{()'}{\Rightarrow} 0=a\cdot y''+b\cdot y' \overset{:a}{\Rightarrow} 0=y''+\frac{b}{a}\cdot y' \overset{-\frac{b}{a}\cdot y'}{\Rightarrow} -\frac{b}{a}\cdot y'=y'' \overset{:y'}{\Rightarrow} -\frac{b}{a}=\frac{y''}{y'} \overset{\int}{\Rightarrow}$$

$$\int -\frac{b}{a}dx=\int \frac{y''}{y'}dx \Rightarrow -\frac{b}{a}\cdot x+d_1=\ln|y'| \overset{e^{()}}{\Rightarrow} e^{-\frac{b}{a}\cdot x+d_1}=y' \overset{\int}{\Rightarrow} \int e^{-\frac{b}{a}\cdot x+d_1}dx=\int y'\,dx \Rightarrow$$

$$-\frac{a}{b}\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot x+d_1}+d_2=y$$

Einsetzen von y und y' in die Differentialgleichung liefert

$$c=a\cdot y'+b\cdot y=a\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot x+d_1}+b\cdot\left(-\frac{a}{b}\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot x+d_1}+d_2\right)=a\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot x+d_1}-a\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot x+d_1}+b\cdot d_2=b\cdot d_2$$

Die Integrationskonstante d_1 kann beliebig gewählt werden, also auch z.B. $d_1=0$, für die Integrationskonstante d_2 muss man wählen $d_2=\frac{c}{b}$.

Lösung der Differentialgleichung ist also (mit $d_1=0$): $y=-\frac{a}{b}\cdot e^{-\frac{b}{a}\cdot x}+\frac{c}{b}$