

Beispiel zur Berechnung eines Ersatzwiderstandes mit Hilfe der Kirchhoff'schen Gesetze

Die Kanten eines Würfels werden aus 12 Widerständen gleichen ohmschen Widerstandes R erstellt.

An räumlich diagonal gegenüberliegenden Eckpunkten wird die Spannung U_{gesamt} angelegt. Zu berechnen ist der Ersatzwiderstand.

Bei [Wikipedia](#) findet man eine Anleitung, die auf Grund von Symmetrieüberlegungen eine einfache Berechnung durch eine Reihenschaltung von 3 Parallelschaltungen erlaubt.

Hier soll gezeigt werden, wie mit Hilfe der [Knoten- und Maschenregel](#) die Lösung gefunden werden kann.

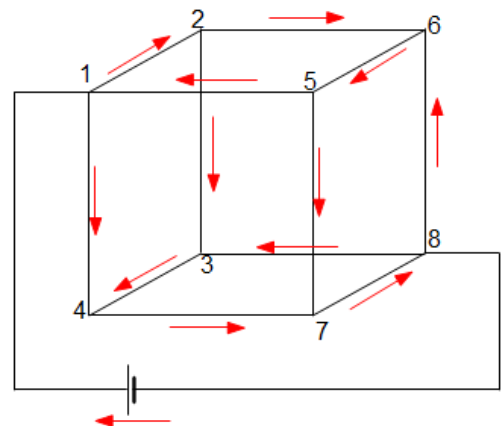
Zunächst werden die Knotenpunkte (= Stellen, an denen mindestens 3 Leitungen zusammentreffen) durchnummeriert.

Jedes Leiterstück wird durch eine Richtung gekennzeichnet (rote Pfeile; die Wahl der Richtung ist beliebig).

Die Summe der zu einem Knoten fließenden Ströme I_{xy} ist gleich 0. Zeigt der Pfeil vom Knoten weg, muss I_{xy} negativ angesetzt werden.

Die Summe der Teil-Spannungen U_{xy} um eine Masche (= Leiterstücke, die ein leeres Flächenstück begrenzen) herum ist gleich 0. Zeigt der Pfeil gegen die Umlaufrichtung, muss U_{xy} negativ angesetzt werden.

In diesem Beispiel gibt es 8 Knoten und 7 Maschen. Aus den sich daraus ergebenden 15 Gleichungen werden die 13 Teilströme in den Leiterteilen berechnet:



$$\text{Knoten 1: } I_{12} + I_{14} - I_{15} - I_{18} = 0$$

$$\text{Knoten 2: } -I_{12} + I_{23} + I_{26} = 0$$

$$\text{Knoten 3: } I_{34} - I_{23} - I_{38} = 0$$

$$\text{Knoten 4: } -I_{14} - I_{34} + I_{47} = 0$$

$$\text{Knoten 5: } I_{57} + I_{15} - I_{56} = 0$$

$$\text{Knoten 6: } -I_{26} + I_{56} - I_{68} = 0$$

$$\text{Knoten 7: } -I_{57} - I_{47} + I_{78} = 0$$

$$\text{Knoten 8: } I_{38} + I_{68} - I_{78} + I_{18} = 0$$

$$\text{Masche 1234: } U_{12} + U_{23} + U_{34} - U_{14} = 0$$

$$\text{Masche 5786: } U_{57} + U_{78} + U_{68} + U_{56} = 0$$

$$\text{Masche 5147: } U_{15} + U_{14} + U_{47} - U_{57} = 0$$

$$\text{Masche 2386: } U_{23} - U_{38} + U_{68} - U_{26} = 0$$

$$\text{Masche 1265: } U_{12} + U_{26} + U_{56} + U_{15} = 0$$

$$\text{Masche 3478: } U_{34} + U_{47} + U_{78} + U_{38} = 0$$

$$\text{Masche 1478: } U_{14} + U_{47} + U_{78} + U_{\text{gesamt}} = 0$$

Die Gleichungen für die Maschen werden mit Hilfe der Beziehung $U=R \cdot I$ so umgeschrieben, dass sie die Stromstärken I_{xy} enthalten (Hinweis: die Widerstände haben alle denselben Wert R):

$$\text{Masche 1234: } R \cdot I_{12} + R \cdot I_{23} + R \cdot I_{34} - R \cdot I_{14} = 0$$

$$\text{Masche 5786: } R \cdot I_{57} + R \cdot I_{78} + R \cdot I_{68} + R \cdot I_{56} = 0$$

$$\text{Masche 5147: } R \cdot I_{15} + R \cdot I_{14} + R \cdot I_{47} - R \cdot I_{57} = 0$$

$$\text{Masche 2386: } R \cdot I_{23} - R \cdot I_{38} + R \cdot I_{68} - R \cdot I_{26} = 0$$

$$\text{Masche 1265: } R \cdot I_{12} + R \cdot I_{26} + R \cdot I_{56} + R \cdot I_{15} = 0$$

$$\text{Masche 3478: } R \cdot I_{34} + R \cdot I_{47} + R \cdot I_{78} + R \cdot I_{38} = 0$$

$$\text{Masche 1478: } R \cdot I_{14} + R \cdot I_{47} + R \cdot I_{78} + U_{\text{gesamt}} = 0$$

$$\text{Masche 1234: } I_{12} + I_{23} + I_{34} - I_{14} = 0$$

$$\text{Masche 5786: } I_{57} + I_{78} + I_{68} + I_{56} = 0$$

$$\text{Masche 5147: } I_{15} + I_{14} + I_{47} - I_{57} = 0$$

$$\text{Masche 2386: } I_{23} - I_{38} + I_{68} - I_{26} = 0$$

$$\text{Masche 1265: } I_{12} + I_{26} + I_{56} + I_{15} = 0$$

$$\text{Masche 3478: } I_{34} + I_{47} + I_{78} + I_{38} = 0$$

$$\text{Masche 1478: } I_{14} + I_{47} + I_{78} + \frac{U_{\text{gesamt}}}{R} = 0$$

Wichtig: $I_{18} = U_{\text{gesamt}} / R_{\text{Ersatz}} \neq U_{\text{gesamt}} / R$

Nun werden die Gleichungen so geschrieben, dass gleiche Stromstärken untereinander stehen:

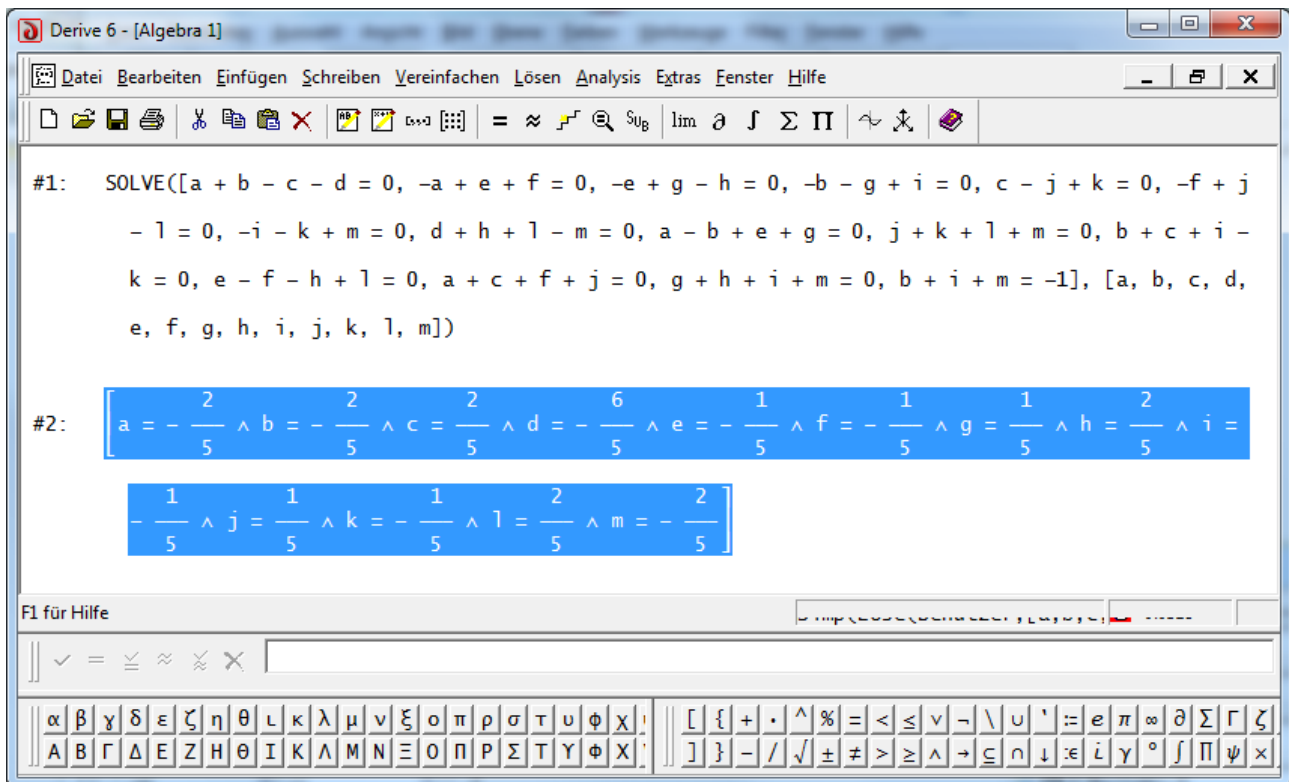
$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
 +I_{12} & +I_{14} & -I_{15} & -I_{18} & & & & & & & & & & & & & & = & 0 \\
 -I_{12} & & & & & +I_{23} & +I_{26} & & & & & & & & & & & = & 0 \\
 & & & & & -I_{23} & & +I_{34} & -I_{38} & & & & & & & & & = & 0 \\
 & -I_{14} & & & & & & -I_{34} & & +I_{47} & & & & & & & & = & 0 \\
 & & +I_{15} & & & & & & & & -I_{56} & +I_{57} & & & & & & = & 0 \\
 & & & & & -I_{26} & & & & & +I_{56} & & -I_{68} & & & & & = & 0 \\
 & & & & & & & & & -I_{47} & & -I_{57} & +I_{78} & & & & = & 0 \\
 +I_{12} & -I_{14} & & +I_{18} & & & & +I_{38} & & & +I_{68} & -I_{78} & & & & & = & 0 & \text{Matrix} \\
 & & & & +I_{23} & & +I_{34} & & & & & & & & & & = & 0 & \rightarrow \\
 & & +I_{14} & +I_{15} & & & & & & +I_{47} & & -I_{57} & +I_{68} & +I_{78} & & & = & 0 \\
 & & & & +I_{23} & -I_{26} & & -I_{38} & & & & & +I_{68} & & & & = & 0 \\
 +I_{12} & & +I_{15} & & & +I_{26} & & & & & +I_{56} & & & & & & = & 0 \\
 & & & & & & +I_{34} & +I_{38} & +I_{47} & & & & & & & +I_{78} & = & 0 \\
 & +I_{14} & & & & & & & & +I_{47} & & & & & & +I_{78} & = & -\frac{U_{\text{gesamt}}}{R}
 \end{array}$$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
1	1	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	-1	0	1	-1	0	0	0	0	0
4	0	-1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	-1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	1
8	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	-1
9	1	-1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
11	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0
12	0	0	0	0	1	-1	0	-1	0	0	0	1	0
13	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
15	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1

Zum Rechnen wird U_{gesamt}/R zunächst auf 1 A normiert.

Mit einem geeigneten Programm, z. B. Derive, wird das Gleichungssystem gelöst:

- Dabei gilt folgende Zuordnung:
- $a \leftrightarrow I_{12}$; $b \leftrightarrow I_{14}$; $c \leftrightarrow I_{15}$; $d \leftrightarrow I_{18}$;
 - $e \leftrightarrow I_{23}$; $f \leftrightarrow I_{26}$;
 - $g \leftrightarrow I_{34}$; $h \leftrightarrow I_{38}$;
 - $i \leftrightarrow I_{47}$;
 - $j \leftrightarrow I_{56}$; $k \leftrightarrow I_{57}$;
 - $l \leftrightarrow I_{68}$;
 - $m \leftrightarrow I_{78}$



Die blau unterlegten Werte sind Stromstärken in der Einheit Ampere in den betreffenden Leiterstücken (Zuordnung siehe Seite 2) bezogen auf $U_{\text{gesamt}}/R = 1 \text{ A}$ und den Widerstand 1Ω .

Unter Berücksichtigung der Gleichung $U = R \cdot I \rightarrow I = \frac{U}{R}$ kann man für beliebige Spannungen und Widerstände die Stromstärken berechnen: Mit wachsender Spannung U nimmt die Stromstärke I bei konstantem Widerstand R proportional zu und bei wachsendem Widerstand R nimmt die Stromstärke I bei konstanter Spannung U umgekehrt proportional ab.

Den Ersatzwiderstand berechnet man aus der angelegten Spannung U_{gesamt} und der Stromstärke $I_{\text{gesamt}} = I_{18}$:

$$\text{Beim Widerstand } R=1 \Omega \text{ gilt: } R_{\text{Ersatz}} = \frac{U_{\text{gesamt}}}{I_{\text{gesamt}}} = \frac{U_{\text{gesamt}}}{\frac{U_{\text{gesamt}}}{\frac{5}{6} \Omega}} = \frac{5}{6} \cdot U_{\text{gesamt}} \Omega$$

Mit der Spannung 1 V würde sich also bei Verwendung von 1Ω -Widerständen der Ersatzwiderstand $R_{\text{Ersatz}} = \frac{5}{6} \Omega$ ergeben.