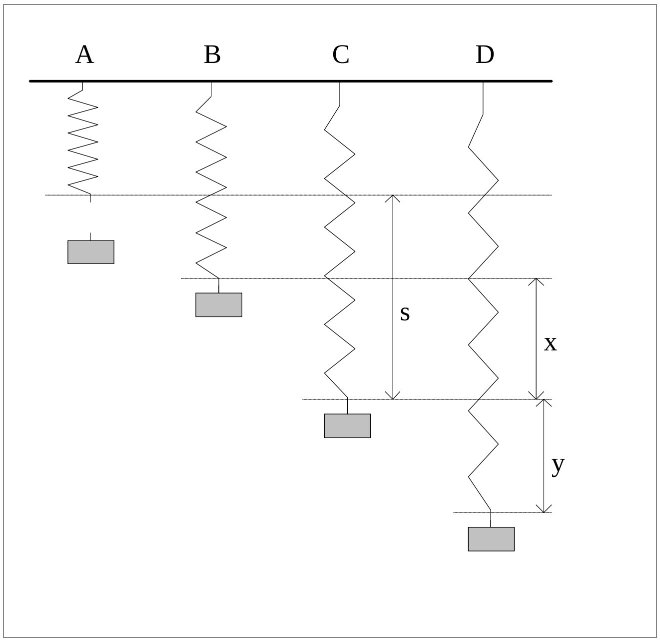

Übung zum Energieerhaltungssatz - Schwingung einer Schraubenfeder

A: An die Feder ist keine Masse angehängt.

C: Nach Anhängen der Masse m hat sich die Feder um s verlängert.

D: Die Feder wird insgesamt um s+y ausgelenkt und dann schwingen gelassen. Der Zustand D wird immer am unteren Umkehrpunkt der Feder eingenommen.

B: Dieser Zustand kennzeichnet den oberen Umkehrpunkt der Feder bei der Schwingung. Die Auslenkung der Feder beträgt hier s-x.

Gegeben: m: Masse des angehängten Körpers

D: Federkonstante

g: Ortsfaktor

$W_{Pot} = m \cdot g \cdot h$

$W_{Kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

$W_{Sp} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$

Hookesches Gesetz:

$F = D \cdot s$

Nullpunkt für die potentielle Energie ist das untere Ende der Feder im Zustand D

Aufgaben:
a) Berechnen Sie, in welchem Verhältnis die Streckenlängen x und y zueinander stehen.
b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von den gegebenen Größen die Geschwindigkeit der Masse im Zustand C.

Zu jedem Zeitpunkt der Schwingung gilt der Energieerhaltungssatz: „Die Summe der Energien ist konstant.“

Also: $W_{gesamt} = W_{Pot} + W_{Kin} + W_{Sp} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$

Die Größe D kann wegen $F_G = m \cdot g$ und $F = D \cdot s$ in den Termen folgendermaßen ersetzt werden:

$$m \cdot g = D \cdot s \;\Rightarrow\; D = \frac{m \cdot g}{s}$$

Gesamtenergie im Zustand B:
Wegen des oberen Umkehrpunktes haben hier die Geschwindigkeit und damit auch die kinetische Energie den Wert 0.

$$W_B = m \cdot g \cdot (x + y) \;+\; \frac{1}{2} \cdot D \cdot (s - x)^2$$

Gesamtenergie im Zustand D:
Wegen des unteren Umkehrpunktes haben hier die Geschwindigkeit und damit auch die kinetische Energie den Wert 0. Außerdem hat hier die potentielle Energie den Wert 0.

$$W_D = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (s + y)^2$$

Gesamtenergie im Zustand C:
Hier haben alle drei Energiearten von 0 verschiedene Werte.

$$W_C = m \cdot g \cdot y \ + \ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \ + \ \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$$

a)
Es gilt $W_B = W_C = W_D$, also auch

$$W_B = W_D \ \Rightarrow \ m \cdot g \cdot (x+y) \ + \ \frac{1}{2} \cdot D \cdot (s-x)^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (s+y)^2 \ \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot (x+y) + \frac{1}{2} \cdot D \cdot \left((s-x)^2 - (s+y)^2\right) = 0 \ \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot (x+y) + \frac{1}{2} \cdot D \cdot \left(s^2 - 2 \cdot s \cdot x + x^2 - s^2 - 2 \cdot s \cdot y - y^2\right) = 0 \ \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot (x+y) + \frac{1}{2} \cdot D \cdot \left(x^2 - y^2 - 2 \cdot s \cdot (x+y)\right) = 0 \ \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot (x+y) + \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{s} \cdot \left((x-y) \cdot (x+y) - 2 \cdot s \cdot (x+y)\right) = 0 \ \Rightarrow$$

$$(x+y) \cdot (m \cdot g) \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot s} \cdot ((x-y) - 2 \cdot s)\right) = 0 \ \Rightarrow \ \text{wegen} \quad x+y \neq 0$$

$$\left(1 + \frac{1}{2 \cdot s} \cdot ((x-y) - 2 \cdot s)\right) = 0 \ \Rightarrow \ 1 + \frac{x-y}{2 \cdot s} - 1 = \frac{x-y}{2 \cdot s} = 0 \ \Rightarrow \ x - y = 0 \ \Rightarrow \ x = y$$

Die Ruhelage des Pendels liegt also genau in der Mitte zwischen dem oberen und unteren Umkehrpunkt.

b)

$$W_C = W_D \ \Rightarrow \ m \cdot g \cdot y \ + \ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \ + \ \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (s+y)^2 \ \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot y \ + \ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \ + \ \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 + D \cdot s \cdot y + \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2 \ \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot y \ + \ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{m \cdot g}{s} \cdot s \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{s} \cdot y^2 \ \Rightarrow$$

$$g \cdot y \ + \ \frac{1}{2} \cdot v^2 = g \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{s} \cdot y^2 \ \Rightarrow \ v^2 = \frac{g \cdot y^2}{s} \ \Rightarrow \ v = \sqrt{\frac{g}{s}} \cdot y$$