



Übung zum Energieerhaltungssatz - Schwingung einer Schraubenfeder

A: An die Feder ist keine Masse angehängt.

C: Nach Anhängen der Masse m hat sich die Feder um s verlängert.

D: Die Feder wird insgesamt um $s+y$ ausgelenkt und dann schwingen gelassen. Der Zustand D wird immer am unteren Umkehrpunkt der Feder eingenommen.

B: Dieser Zustand kennzeichnet den oberen Umkehrpunkt der Feder bei der Schwingung. Die Auslenkung der Feder beträgt hier $s-x$.

Gegeben: m : Masse des angehängten Körpers

D : Federkonstante

g : Ortsfaktor

Nullpunkt für die potentielle Energie ist das untere Ende der Feder im Zustand D

$$W_{Pot} = m \cdot g \cdot h$$

Hookesches Gesetz:

$$W_{Kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$F = D \cdot s$$

$$W_{Sp} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$$

- Aufgaben:** a) Berechnen Sie, in welchem Verhältnis die Streckenlängen x und y zueinander stehen.
b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von den gegebenen Größen die Geschwindigkeit der Masse im Zustand C.

Zu jedem Zeitpunkt der Schwingung gilt der Energieerhaltungssatz: „Die Summe der Energien ist konstant.“

$$\text{Also: } W_{gesamt} = W_{Pot} + W_{Kin} + W_{Sp} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$$

Die Größe D kann wegen $F_G = m \cdot g$ und $F = D \cdot s$ in den Termen folgendermaßen ersetzt werden:

$$m \cdot g = D \cdot s \Rightarrow D = \frac{m \cdot g}{s}$$

Gesamtenergie im Zustand B:

Wegen des oberen Umkehrpunktes haben hier die Geschwindigkeit und damit auch die kinetische Energie den Wert 0.

$$W_B = m \cdot g \cdot (x + y) + \frac{1}{2} \cdot D \cdot (s - x)^2$$

Gesamtenergie im Zustand D:

Wegen des unteren Umkehrpunktes haben hier die Geschwindigkeit und damit auch die kinetische Energie den Wert 0. Außerdem hat hier die potentielle Energie den Wert 0.

$$W_D = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (s + y)^2$$

Gesamtenergie im Zustand C:

Hier haben alle drei Energiearten von 0 verschiedene Werte.

$$W_C = m \cdot g \cdot y + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$$

a)

Es gilt $W_B = W_C = W_D$, also auch

$$W_B = W_D \Rightarrow m \cdot g \cdot (x+y) + \frac{1}{2} \cdot D \cdot (s-x)^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (s+y)^2 \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot (x+y) + \frac{1}{2} \cdot D \cdot ((s-x)^2 - (s+y)^2) = 0 \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot (x+y) + \frac{1}{2} \cdot D \cdot (s^2 - 2 \cdot s \cdot x + x^2 - s^2 - 2 \cdot s \cdot y - y^2) = 0 \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot (x+y) + \frac{1}{2} \cdot D \cdot (x^2 - y^2 - 2 \cdot s \cdot (x+y)) = 0 \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot (x+y) + \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{s} \cdot ((x-y) \cdot (x+y) - 2 \cdot s \cdot (x+y)) = 0 \Rightarrow$$

$$(x+y) \cdot (m \cdot g) \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot s} \cdot ((x-y) - 2 \cdot s)\right) = 0 \Rightarrow \text{wegen } x+y \neq 0$$

$$\left(1 + \frac{1}{2 \cdot s} \cdot ((x-y) - 2 \cdot s)\right) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{x-y}{2 \cdot s} - 1 = \frac{x-y}{2 \cdot s} = 0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$$

Die Ruhelage des Pendels liegt also genau in der Mitte zwischen dem oberen und unteren Umkehrpunkt.

b)

$$W_C = W_D \Rightarrow m \cdot g \cdot y + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (s+y)^2 \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot y + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 + D \cdot s \cdot y + \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2 \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot y + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{m \cdot g}{s} \cdot s \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{s} \cdot y^2 \Rightarrow$$

$$g \cdot y + \frac{1}{2} \cdot v^2 = g \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{s} \cdot y^2 \Rightarrow v^2 = \frac{g \cdot y^2}{s} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g}{s}} \cdot y$$