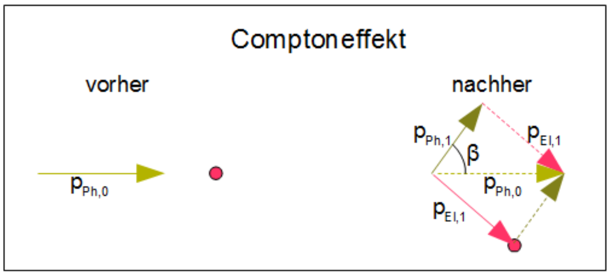
Comptoneffekt - Berechnung der Wellenlängendifferenz

Trifft ein Photon auf ein Elektron, so kann es sein, dass das Photon verschwindet und das Elektron den Impuls und die Energie des Photons aufnimmt. Man spricht dann vom Fotoeffekt.

Es kann aber auch sein, dass das Photon nur einen kleinen Teil seiner Energie an das Elektron abgibt und dass nach dem Stoß ein Photon geringerer Energie vorhanden ist. Dieser Effekt heißt Comptoneffekt.



Um die folgende Rechnung einfacher zu machen, nehmen wir an, das Elektron sei zunächst in Ruhe. Wir befinden uns also im Bezugssystem des Elektrons.

Gesucht ist die Änderung der Wellenlänge des Photons in Abhängigkeit vom Ablenkwinkel β.

Aus der Zeichnung kann man den Impuls des Elektrons nach dem Stoß ($p_{El,1}$) mit Hilfe des Kosinussatzes bestimmen: $p_{El,1}^2 = p_{Ph,0}^2 + p_{Ph,1}^2 - 2 \cdot p_{Ph,0} \cdot p_{Ph,1} \cdot \cos\beta$ mit $p_{Ph,0} = \frac{h}{\lambda_0}$ und $p_{Ph,1} = \frac{h}{\lambda_1}$.

Der Energieerhaltungssatz muss gelten: $E_{Ph,0} + E_{El,0} = E_{Ph,1} + E_{El,1}$

Es gilt $E_{PH,0} = h \cdot f_0 = \frac{h \cdot c}{\lambda_0}$ und $E_{PH,1} = h \cdot f_1 = \frac{h \cdot c}{\lambda_1}$.

Für das Elektron muss man relativistisch rechnen: $E_{EL,0} = m_0 \cdot c^2$ und $E_{EL,1}^2 = \left(m_0 \cdot c^2\right)^2 + \left(p_{El,1} \cdot c\right)^2$.

Werden diese Werte in den Energieerhaltungssatz eingesetzt, so ergibt sich:

$$\frac{h \cdot c}{\lambda_0} + m_0 \cdot c^2 = \frac{h \cdot c}{\lambda_1} + \sqrt{\left(m_0 \cdot c^2\right)^2 + \left(p_{El,1} \cdot c\right)^2} = \frac{h \cdot c}{\lambda_1} + \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + p_{El,1}^2 \cdot c^2} \rightarrow$$

$$\frac{h \cdot c}{\lambda_0} + m_0 \cdot c^2 = \frac{h \cdot c}{\lambda_1} + \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + \left(p_{Ph,0}^2 + p_{Ph,1}^2 - 2 \cdot p_{Ph,0} \cdot p_{Ph,1} \cdot \cos\beta\right) \cdot c^2} \rightarrow$$

$$\frac{h \cdot c}{\lambda_0} + m_0 \cdot c^2 = \frac{h \cdot c}{\lambda_1} + \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + \left(\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda_1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{h}{\lambda_0} \cdot \frac{h}{\lambda_1} \cdot \cos\beta\right) \cdot c^2} \rightarrow$$

$$\frac{h \cdot c}{\lambda_0} - \frac{h \cdot c}{\lambda_1} + m_0 \cdot c^2 = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + \left(\frac{h \cdot c}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h \cdot c}{\lambda_1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_0} \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_1} \cdot \cos\beta} \rightarrow$$

$$\left(\frac{h \cdot c}{\lambda_0} - \frac{h \cdot c}{\lambda_1} + m_0 \cdot c^2\right)^2 = m_0^2 \cdot c^4 + \left(\frac{h \cdot c}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h \cdot c}{\lambda_1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_0} \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_1} \cdot \cos\beta \rightarrow$$

$$\cancel{\left(\frac{h \cdot c}{\lambda_0}\right)^2} + \cancel{\left(\frac{h \cdot c}{\lambda_1}\right)^2} + \cancel{m_0^2 \cdot c^4} - 2 \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_0} \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_1} + 2 \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_0} \cdot m_0 \cdot c^2 - 2 \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_1} \cdot m_0 \cdot c^2 =$$

$$\cancel{m_0^2 \cdot c^4} + \cancel{\left(\frac{h \cdot c}{\lambda_0}\right)^2} + \cancel{\left(\frac{h \cdot c}{\lambda_1}\right)^2} - 2 \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_0} \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_1} \cdot \cos\beta \rightarrow$$

$$2 \cdot h \cdot m_0 \cdot c^3 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}\right) = 2 \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_0} \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_1} \cdot (1 - \cos\beta) \rightarrow \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0 \cdot \lambda_1} = \frac{h}{m_0 \cdot c \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1} \cdot (1 - \cos\beta) \rightarrow$$

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 \cdot c} \cdot (1 - \cos\beta)$$