

# Experimentelle Bestimmung der Tiefe eines Brunnens

Eine goldene Kugel (Märchen vom Froschkönig) fällt in einen Brunnen. Nach genau 1,5 s hört die Prinzessin das Auftreffen der Kugel auf dem Wasser. Wie tief ist der Brunnen? (Schallgeschwindigkeit  $v_s = 330 \frac{m}{s}$ ).

## Näherungslösung

Die Kugel fällt im freien Fall. Es kann also die Formel  $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$  verwendet werden.

Mit dem Weg  $s_K$  und der Fallzeit  $t_K$  der Kugel gilt also  $s_K = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_K^2$ .

Näherungsweise gilt  $t_K \approx 1,5 s$  und damit  $s_K = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_K^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 1,5^2 m = 11,04 m$ .

## Genauere Lösung

In der Näherungslösung wurde nicht berücksichtigt, dass der Schall nach seiner Erzeugung noch durch den Brunnen (Strecke  $s_K$ ) zum Ohr der Prinzessin gelangen muss und dazu auch eine Zeit  $t_s$  benötigt.

Die Gesamtzeit  $t = 1,5 s$  ergibt sich also aus  $t = t_K + t_s$ .

Für  $s_K$  kann man deshalb ansetzen  $s_K = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - t_s)^2$ .

Da sich der Schall mit konstanter Geschwindigkeit ausbreitet, gilt  $s_K = v_s \cdot t_s$  oder  $t_s = \frac{s_K}{v_s}$ .

Einsetzen:  $s_K = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - t_s)^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(t - \frac{s_K}{v_s}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(t^2 - \frac{2t s_K}{v_s} + \frac{s_K^2}{v_s^2}\right) = \frac{g t^2}{2} - \frac{g t s_K}{v_s} + \frac{g s_K^2}{2 v_s^2}$

Ordnen nach Potenzen von  $s_K$ :  $\frac{g}{2 v_s^2} \cdot s_K^2 - \left(\frac{g t}{v_s} + 1\right) \cdot s_K + \frac{g t^2}{2} = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung mit p-q-Formel:

Faktor vor  $s_K^2$  entfernen:

$$s_K^2 - \frac{2 v_s^2}{g} \cdot \left(\frac{g t}{v_s} + 1\right) \cdot s_K + v_s^2 t^2 = s_K^2 - \frac{2 v_s^2}{g} \cdot \left(\frac{g t + v_s}{v_s}\right) \cdot s_K + v_s^2 t^2 = s_K^2 - \frac{2 v_s g t + 2 v_s^2}{g} \cdot s_K + v_s^2 t^2 = 0$$

$$\text{p-q-Formel anwenden: } s_{K1,2} = \frac{v_s g t + v_s^2}{g} \pm \sqrt{\frac{(v_s g t + v_s^2)^2}{g^2} - v_s^2 t^2} = \frac{v_s g t + v_s^2}{g} \pm \sqrt{v_s^2 t^2 + \frac{2 v_s^3 t}{g} + \frac{v_s^4}{g^2} - v_s^2 t^2}$$

$$\text{also: } s_{K1,2} = \frac{v_s g t + v_s^2}{g} \pm \sqrt{\frac{2 v_s^3 t}{g} + \frac{v_s^4}{g^2}} = \left(v_s t + \frac{v_s}{g}\right) \pm \frac{v_s}{g} \cdot \sqrt{2 v_s g t + v_s^2}$$

$$\text{Werte einsetzen: } s_{K1,2} = \left(\left(330 \cdot 1,5 + \frac{330^2}{9,81}\right) \pm \frac{330}{9,81} \cdot \sqrt{2 \cdot 330 \cdot 9,81 \cdot 1,5 + 330^2}\right) m = (11595,92 \pm 11585,35) m$$

$$s_{K1} = 23181,26 m ; s_{K2} = 10,57 m$$

Der erste Wert kann nicht stimmen (siehe Näherungslösung).

Also ist der Brunnen 10,57 m tief.