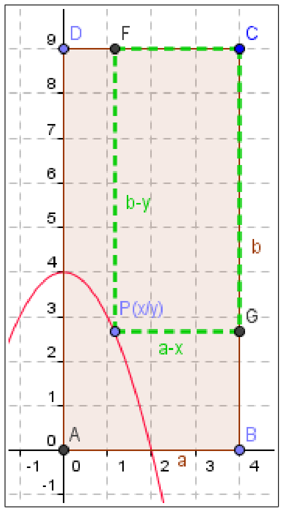
Extremwertaufgabe: Verwertung einer zerbrochenen Glasscheibe

Beispiel für Randextremum

Aufgabe: Die Ecke einer rechteckigen Glasscheibe mit der Breite $a=4\,dm$ und der Höhe $b=9\,dm$ ist so abgebrochen, dass die Bruchkante durch die Funktion mit der Gleichung $y=-x^2+4$ beschrieben werden kann. Der Rest der Scheibe soll so zugeschnitten werden, dass die Schnittkanten parallel zu den Kanten der Scheibe verlaufen und dass die neue Scheibe maximalen Flächeninhalt besitzt.



Lösung:

Die Aufgabe besteht darin, einen Punkt P(x/y) für einen x-Wert im Intervall [0,2] auf der Parabel zu finden, sodass das grün gezeichnete Rechteck diesen Punkt als einen Eckpunkt besitzt und maximalen Flächeninhalt hat.

Die Flächeninhaltsfunktion für das grün gezeichnete Rechteck ist

$A(x,y)=(a-x)\cdot(b-y)=ab-ay-bx+xy$

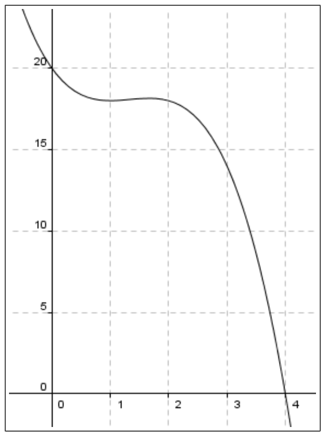
Da die Flächeninhaltsfunktion in Abhängigkeit von 2 Variablen vorliegt, muss eine Variable durch die andere ersetzt werden (in diesem Fall y durch x):

$$y=-x^2+4 \;\; ; \;\; A(x,y)=ab-ay-bx+xy=ab-a\cdot\left(-x^2+4\right)-bx+x\cdot\left(-x^2+4\right)=A(x)$$

$A(x)=ab+ax^2-4a-bx-x^3+4x$

oder mit $a=4$ und $b=9$:

$A(x)=36+4x^2-16-9x-x^3+4x=-x^3+4x^2-5x+20$



Der nebenstehende Graph gehört zur Funktion A(x).
Lokale Maxima findet man durch Ableiten und Nullsetzen:

$$A'(x)=-3x^2+8x-5\overset{!}{=}0 \;\rightarrow\; x^2-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0 \;\rightarrow\; x_{1,2}=\frac{4}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{5}{3}} \;\rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{4}{3}\pm\sqrt{\frac{16}{9}-\frac{15}{9}}=\frac{4}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{4}{3}\pm\frac{1}{3} \;\rightarrow\; x_1=\frac{5}{3} \;\; ; \;\; x_2=\frac{3}{3}=1$$

Untersuchung auf Maximum und Minimum:

$$A''(x)=-6x+8 \;\rightarrow\; A''\left(\frac{5}{3}\right)=-10+8<0 \;\; (Maximum) \;\; ; \;\; A''(1)=-6+8>0 \;\; (Minimum)$$

Für das (lokale) Maximum bei $x=\frac{5}{3}$ ergibt sich der Flächeninhalt

$$A\left(\frac{5}{3}\right)=-\left(\frac{5}{3}\right)^3+4\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2-5\cdot\frac{5}{3}+20=-\frac{125}{27}+4\cdot\frac{25}{9}-\frac{25}{3}+20=-\frac{125}{27}+\frac{300}{27}-\frac{225}{27}+\frac{540}{27}=\frac{490}{27}\approx 18{,}1$$

Da $x\in[0,2]$, müssen die Randwerte für x=0 und x=2 bestimmt werden. (Der Graph zeigt auch schon, dass das Maximum im betrachteten Intervall bei x=0 liegt)

$$A(0)=20 \;\; ; \;\; A(2)=-2^3+4\cdot 2^2-5\cdot 2+20=-8+16-10+20=18$$

Die Fläche mit dem größten Inhalt erhält man also, wenn man den Schnitt parallel zur x-Achse durch den Scheitelpunkt der Parabel durchführt. Der Flächeninhalt beträgt dann 20 dm².