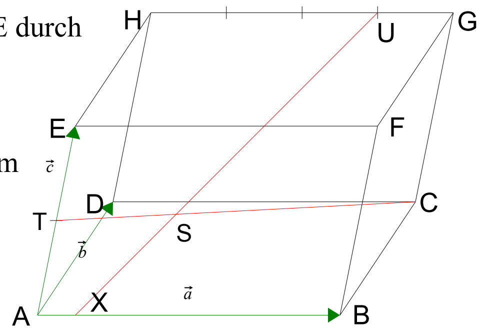
Methode des geschlossenen Streckenzuges beim Parallelflach



In nebenstehendem Parallelflach werden die Strecken AB, AD und AE durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ beschrieben.

Strecke AE wird durch T halbiert.

Die Strecke HG wird geviertelt. U befindet sich auf dem Teilstrich zum letzten Viertel vor G.

TC ist vorgegeben. Von U aus zieht man nun eine Strecke, die die Strecke TC schneidet und auf AB im Punkt X endet.

Gefragt ist, welchen Bruchteil die Strecke AX von der gesamten Strecke AB ausmacht.

Der geschlossene Streckenzug umläuft das Viereck ATSX:

$$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TS}+\overrightarrow{SX}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{XA}=\nu\cdot(-\vec{a})=-\nu\cdot\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AT}=\frac{1}{2}\cdot\vec{c}$$

$$\overrightarrow{TS}=\lambda\cdot\overrightarrow{TC}=\lambda\cdot\left(\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\lambda\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{SX}=\mu\cdot\overrightarrow{UX}=\mu\cdot\left(\overrightarrow{UG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BX}\right)=\mu\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+(1-\nu)\cdot(-\vec{a})\right)$$

$$-\nu\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\cdot\lambda\cdot\vec{c}+\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}\cdot\mu\cdot\vec{a}-\mu\cdot\vec{b}-\mu\cdot\vec{c}-\mu\cdot\vec{a}+\mu\cdot\nu\cdot\vec{a}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\cdot\left(-\nu+\lambda+\frac{1}{4}\cdot\mu-\mu+\mu\cdot\nu\right)+\vec{b}\cdot(\lambda-\mu)+\vec{c}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\lambda-\mu\right)=\vec{0}$$

Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{matrix}-\nu+\lambda-\frac{3}{4}\cdot\mu+\mu\cdot\nu=0\\ \lambda-\mu=0\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\lambda-\mu=0\end{matrix}\right\}$$

Die zweite Gleichung ergibt λ=μ.

Eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt sich $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\lambda-\lambda=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\lambda \;\rightarrow\; \lambda=\frac{1}{3}=\mu$

Einsetzen in die erste Gleichung: $-\nu+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\nu=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{2}{3}\cdot\nu \;\xrightarrow{\cdot 12}\; 4-3=8\cdot\nu \;\rightarrow\; \nu=\frac{1}{8}$

X teilt also die Strecke AB im Verhältnis 1 zu 7 (AX ist $\frac{1}{8}$ der Strecke AB).