Wie gewinne ich aus einer Funktionsgleichung einer gebrochen-rationalen Funktion ohne umfangreiche Rechnung einen Überblick über den Verlauf des Graphen?

Alle Beispiele stehen in einem GeoGebra-Arbeitsblatt zur Verfügung. Ein Rechtsklick auf die im linken Bereich vorhandenen Funktionsgleichungen und die Auswahl „Objekt anzeigen“ schaltet zwischen sichtbarem und nicht sichtbarem Graph um.
Mit dem Mausrad kann hinein- oder herausgezoomt werden, wenn im rechten Menübutton das Vergrößerungssymbol ausgewählt wurde.
Sie können die Funktionen mit Rechtsklick und „Umdefinieren“ verändern und so experimentell weitere Erkenntnisse gewinnen.

1. Nullstellen

Die Nullstellen des Zählers ergeben die Nullstellen.

So hat $f(x)=\frac{x}{x+1}$ wegen $x=0$ die Nullstelle bei x gleich 0.

$g(x)=\frac{0{,}08\cdot x^2\cdot(x-4)\cdot(x+3)^3}{(x-2)\cdot(x+1)^2}$ besitzt bei x=4 eine (einfache) Nullstelle, bei x=0 eine doppelte Nullstelle und bei x=-3 eine 3-fache Nullstelle. Bei Nullstellen mit ungeradzahligem Grad (also Hochzahl 1, 3, 5, 7, ...) schneidet der Graph die x-Achse, bei geradzahligem Grad (also Hochzahl 2, 4, 6, ...) berührt er die x-Achse nur (es liegt also auf alle Fälle zusätzlich dort ein Hochpunkt oder Tiefpunkt vor). Man kann das zeigen, indem man x-Werte aus der Nähe der Nullstelle einsetzt und überlegt, ob sich das Vorzeichen des Faktors dabei ändert oder nicht.

2. Polstellen

Die Nullstellen des Nenners ergeben die Polstellen (Stellen, an denen es keinen Funktionswert gibt und an dem die Kurven senkrechte Tangenten besitzen).
f(x) hat somit einen Pol bei x= -1.
g(x) besitzt einen 1-fachen Pol bei x=2 und einen 2-fachen Pol bei x= -1. Bei einem ungeradzahligen Pol (also Hochzahl 1, 3, 5, 7, ...) ist das Vorzeichen der Funktionswerte auf beiden Seiten des Pols unterschiedlich, bei geradzahligem Pol (also Hochzahl 2, 4, 6, ...) liegt das gleiche Vorzeichen vor.

3. Lücken

Den Funktionsterm $h(x)=\frac{4\cdot(x-2)^3\cdot(x+1)\cdot(x+4)^2}{(x-2)^2\cdot(x+1)\cdot(x+4)^4}$ kann man kürzen zu $\frac{4\cdot(x-2)}{(x+4)^2}$. Der Graph scheint also nur eine 1-fache Nullstelle bei x=2 und einen 2-fachen Pol bei x= -4 zu haben.
Nicht zu sehen bei GeoGebra sind die Lücken bei x=2 und x= -1. Dort fehlt im Graph nur ein einziger Punkt, da bei diesen x-Werten die Ausgangsgleichung im Nenner zu 0 wird, dort also die Funktion nicht definiert ist. Die Lücken bezeichnet man als hebbar, da die Definition von Funktionswerten an diesen Stellen $h(2)=0$ und $h(-1)=\frac{4}{3}$ die Lücken schließen würde.

4. Verhalten für $x\to\pm\infty$

Dividiert man den Zähler so lange durch den Nenner (Polynomdivision), bis als Rest ein Bruch übrig bleibt, der für $x\to\infty$ gegen 0 geht, so kann das globale Verhalten des Graphen gut erkannt werden:

$f(x)=\frac{x}{x+1}=x:(x+1)=1+\frac{1}{x}$ Daraus folgt: Für betragsmäßig große x-Werte wird der Bruch $\frac{1}{x}$ vernachlässigbar klein und der Funktionsgraph vereinfacht sich zu $f(x)\approx 1$. Es existiert also eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung y=1.

Bei der Funktion g(x) gilt grad(Zähler) = 6 und grad(Nenner) = 3. Würde man hier dividieren (was etwas aufwändiger wäre), würde man eine Funktion 3. Grades (6-3=3) als Globalfunktion erhalten. Eine Vorzeichenbetrachtung ergibt, dass diese Funktion im positiv Unendlichen gegen $+\infty$ und im negativ Unendlichen gegen $-\infty$ geht.

Bei h(x) nehmen wir die gekürzte Fassung: $h(x)=\frac{4x-8}{x^2+8x+16}$.

Da der Grad des Nenners (grad(Nenner) = 2) größer ist als der Grad des Zählers (grad(Zähler) = 1), gehen die Funktionswerte für $x\to\pm\infty$ gegen 0. Die x-Achse ist also waagrechte Asymptote.

Die Funktion $p(x)=\frac{2x^3-5x^2+3x-1}{4x^2-8x-6}=(2x^3-5x^2+3x-1):(4x^2-8x-6)=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{4}+\frac{4x-\frac{5}{2}}{4x^2-8x-6}$

hat einen Zähler, dessen Grad um genau 1 größer ist als der Grad des Nenners.
In diesem Fall ergibt die Polynomdivision immer eine Geradengleichung (wenn man den Restbruch bei betragsmäßig großen x-Werten vernachlässigt), in diesem Fall $p(x)\approx\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{4}$.