e-Funktion und natürlicher Logarithmus

1. Die Differentialgleichung y=y'

Gibt es eine Funktion, die mit ihrer Ableitung identisch ist, d. h. dass $f(x)=f'(x)$ für alle x gilt?

Wenn die Ableitung trigonometrischer Funktionen bekannt ist, weiß man sicher, dass

$f(x)=\sin x \;\rightarrow\; f'(x)=\cos x \;\rightarrow\; f''(x)=-\sin x \;\rightarrow\; f'''(x)=-\cos x \;\rightarrow\; f''''(x)=\sin x$

Es gilt also $f(x)=f''''(x)$ oder $y=y''''$.

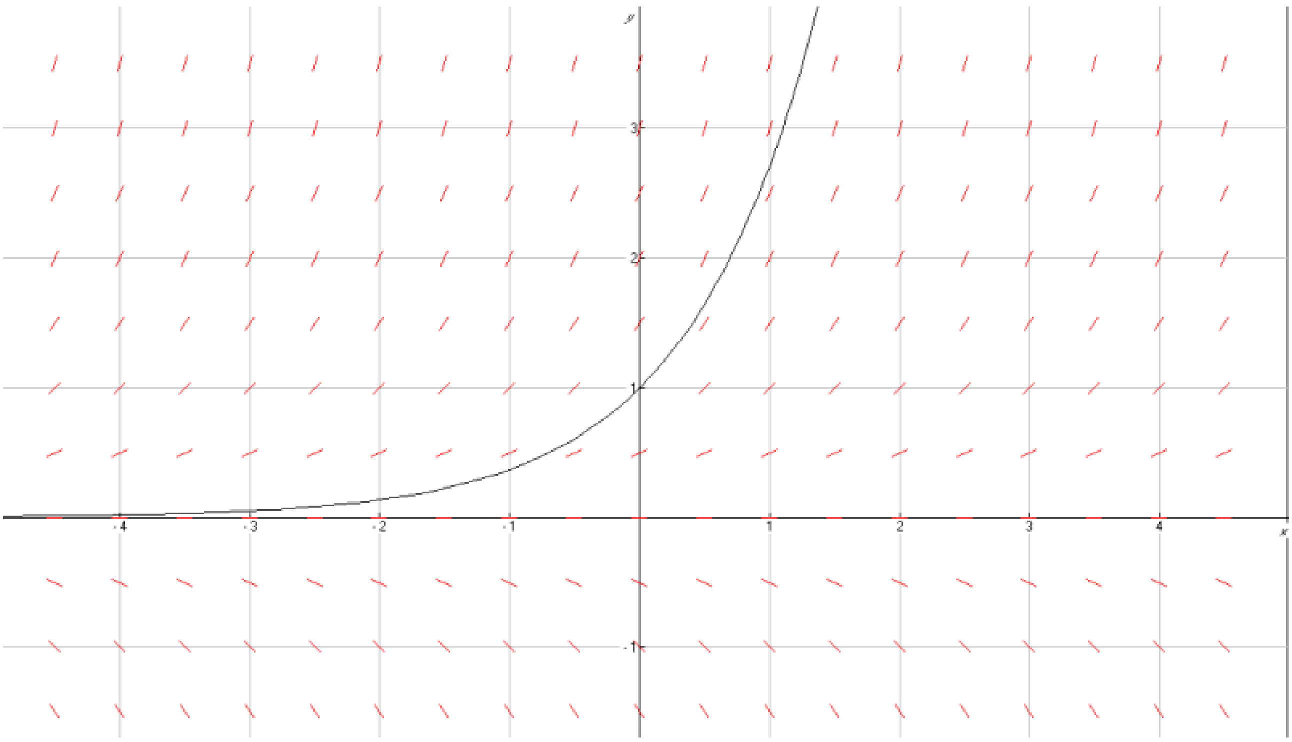
Hier ist aber nach einer Funktion gefragt, deren 1. Ableitung schon identisch mit der gegeben Funktion ist.

Zeichnerischer Ansatz

Um sich einen Eindruck zu verschaffen, wie denn der Funktionsgraph überhaupt aussehen kann, zeichnet man ein Richtungs- oder Steigungsfeld. Man wählt dazu mehrere Stellen (x/y) im Koordinatensystem aus und berechnet, welche Steigung der Graph der gesuchten Funktion hätte, wenn er durch den jeweiligen Punkt laufen würde. Die Steigung in einem Punkt des Graphen ist identisch mit der Steigung der Tangente an den Graphen in diesem Punkt. Von der Tangente zeichnet man einen kleinen Ausschnitt, der den jeweiligen Punkt enthält. So bekommt man einen Eindruck von dem Verlauf des Graphen (wie bei den Feldlinien in einem Magnetfeld, deren Verlauf durch Eisenfeilspäne sichtbar gemacht wird).

Da bei $f(x)=f'(x)$ bzw. y=y' die Steigung nicht vom x-Wert abhängt, müssen die eingetragenen Tangentenstückchen für jeden x-Wert identisch sein. In y-Richtung ändern sich die Steigungen der Tangentenstückchen: Der y-Wert gibt die Steigung an.

Mit einem entsprechenden Computer-Programm erhält man dann z.B. folgendes Bild:

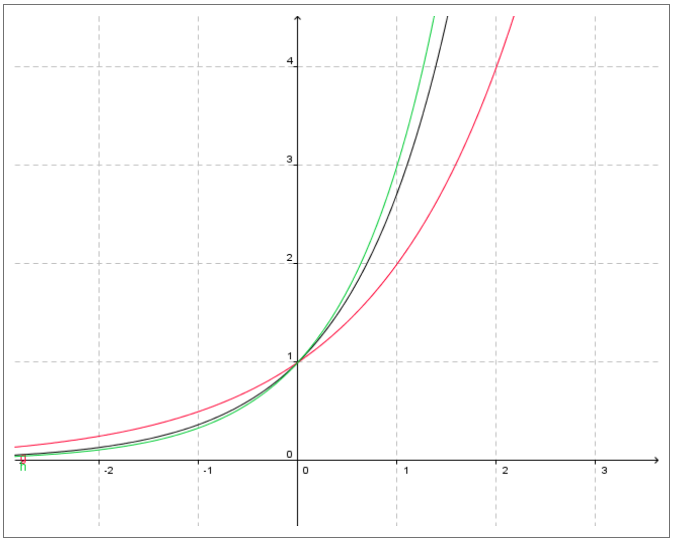


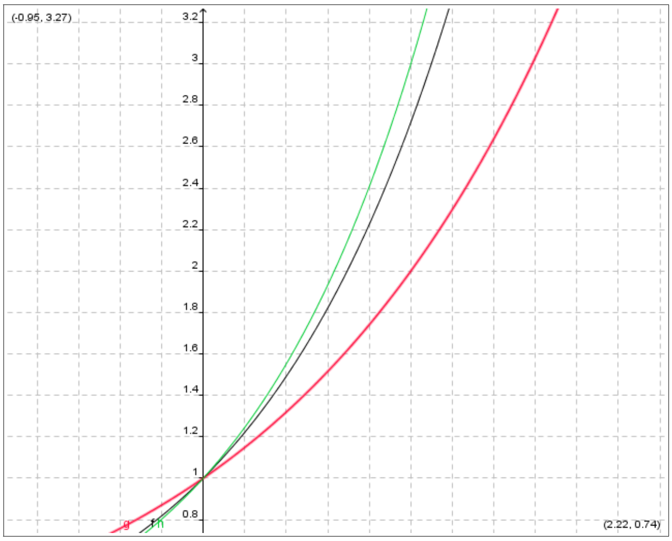
Nimmt man an, der Graph ginge durch den Punkt (0/1) (→Schnittpunkt mit der y-Achse), so folgt aus den angedeuteten Richtungen der eingezeichnete Graph.

Der Typ des Graphen sieht nach einer Hyperbel oder nach der Kurve einer Exponentialfunktion aus.

Eine Hyperbel kann es aber nicht sein, da dann irgendwo im positiven x-Bereich ein Pol vorliegen müsste und dann rechts davon die Kurve entweder von oben oder von unten kommen und sich der x-Achse annähern müsste. Das widerspricht aber den Steigungen, die auf jeder Höhe (y-Wert) für alle x-Werte gleich sind.

Es bleibt die Vermutung Exponentialfunktion $f(x)=a^x$. Zur Bestimmung des a-Wertes liest man aus der Zeichnung den y-Wert bei x=1 ab (wegen $f(1)=a^1=a$) und erhält einen Wert zwischen 2,5 und 3.





Vergleicht man den oben eingezeichneten Graphen (schwarz) mit den Graphen von $y=2^x$ (rot) und $y=3^x$ (grün), so sieht man, dass der a-Wert von $y=a^x$ zwischen 2 und 3 liegen muss.

Durch Zoomen kann man den Bereich (siehe rechts) einschränken auf $2{,}6<a<2{,}8$.
Zoomt man noch weiter, ergibt sich der a-Wert mit immer größerer Genauigkeit (im Rahmen der Rechengenauigkeit des Computerprogramms), aber niemals exakt.

Rechnerischer Ansatz

Bekannt ist die Ableitungsformel für Potenzfunktionen: $f(x)=x^n \rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$.

Da die Ableitung gewisse Ähnlichkeit mit der ursprünglichen Funktion hat, dabei aber einen um 1 kleineren Exponenten hat, müssten, damit die Ableitung gleich (oder wenigstens ähnlich) der Funktion selbst ist, mehrere Potenzen mit um 1 verschiedenem Grad in der Funktionsgleichung vorkommen.

Versuch: Aus $f(x)=1+x+x^2+x^3$ folgt $f'(x)=1+2x+3x^2$.
Als Erfolg ist zu werten, dass in den Summanden der Reihe nach der Grad der Potenz um 1 ansteigt. Allerdings stimmen die Koeffizienten der Potenzen von x noch nicht überein. Das kann man aber durch Probieren korrigieren:

Aus $f(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$ folgt $f'(x)=1+x+\frac{3}{6}x^2=1+x+\frac{1}{2}x^2$. Nun stimmen die Funktion und ihre Ableitung fast überein. Nur der letzte Summand bei $f'(x)$ fehlt. Dort müsste $\frac{1}{6}x^3$ stehen, was aber eine Verlängerung des Terms für $f(x)$ durch $\frac{1}{24}x^4$ bedingt. Nun fehlt wieder ein Summand bei $f'(x)$, was wiederum eine Änderung von $f(x)$ nach sich zieht usw. usw.

Um sich nicht mühsam von einem Summanden zum nächsten vorwärts hangeln zu müssen, wählt man einen allgemeinen Ansatz und versucht hinter das Gesetz der Koeffizientenwahl zu kommen.

Für die Funktion und ihre Ableitung gilt dann:
$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+\ldots$$
$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+6a_6x^5+\ldots$$

Durch Koeffizientenvergleich bei gleichen Potenzen von x ergibt sich

$a_0 = a_1 \rightarrow a_1 = a_0$

$a_1 x = 2 a_2 x \ \rightarrow\ a_2 = \frac{1}{2} a_1$

$a_2 x^2 = 3 a_3 x^2 \ \rightarrow\ a_3 = \frac{1}{3} a_2$

$a_3 x^3 = 4 a_4 x^3 \ \rightarrow\ a_4 = \frac{1}{4} a_3$

$a_4 x^4 = 5 a_5 x^4 \ \rightarrow\ a_5 = \frac{1}{5} a_4$

und wie man leicht einsieht: $a_n = \frac{1}{n} a_{n-1}$

Soll der Graph wie auf Seite 1 angenommen durch den Punkt (0/1) verlaufen, so gilt

$1 = f(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots = a_0$

Aus $a_0 = 1$ folgt $a_1 = 1$.

Aus $a_1 = 1$ folgt $a_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2!}$.

Aus $a_2 = \frac{1}{2}$ folgt $a_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$.

Aus $a_3 = \frac{1}{6}$ folgt $a_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!}$.

Aus $a_4 = \frac{1}{24}$ folgt $a_5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{120} = \frac{1}{5!}$.

Man sieht, dass $a_n = \frac{1}{n!}$.

Mit den gewonnenen Ergebnissen stellt sich die Funktion, die mit ihrer Ableitung identisch ist, nun so dar:

Exkurs: „Fakultät“

Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen nennt man „n Fakultät“ und schreibt es als n!.

Also gilt 1·2·3·4·5 = 5! oder 1·2·3·4 = 4! oder 1·2·3 = 3!

Setzt man diese Reihe fort, so muss man die Gleichung jeweils durch den Werte vor dem ! dividieren.

Es folgt: 1·2 = 2! ; 1 = 1! ; 1 = 0!

0! und 1! sind von der oben stehenden Definition her eigentlich nicht möglich (es wird nichts multipliziert), die Definitionen 0! = 1 und 1! = 1 erweisen sich aber in vielen Bereichen der Mathematik als sehr sinnvoll.

Man definiert deshalb die Fakultät auch so (rekursiv):

$$0! = 1 ;\ 1! = 1 ;\ n! = n \cdot (n-1)!$$

$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$ Probe: $f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$

Nun können wir auch den a-Wert von Seite 1 und 2 genauer bestimmen, weil die Funktion $f(x) = a^x$ und die jetzt gefundene Funktion identisch sein müssen: Wir setzen x=1 und erhalten

$f(x) = a^x \rightarrow f(1) = a$

$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \rightarrow f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$

Je mehr Summanden man in dieser Reihe (= unendliche Summe) addiert, desto mehr nähert sich das Ergebnis dem Wert a = 2,718281828... an.

Diese Zahl nennt man zu Ehren von Leonhard Euler die „Eulersche Zahl e“. Also: e = 2,718281828...

Obwohl die Zahl periodisch aussieht, ist sie es nicht (e = 2,7182818284 5904523536 0287471352 ...).

Wir haben also gefunden: mit $f(x) = e^x$ gilt $f'(x) = e^x$. Was ist wohl die 27. Ableitung von f(x)?

2. Kontinuierliche Verzinsung

Legt man ein Kapital K_0 zu p% Zinsen an, so hat man nach einem Jahr das Kapital K_0 und zusätzlich $\frac{p}{100} \cdot K_0$ an Zinsen, insgesamt also $K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Nach einem weiteren Jahr hat man weiterhin sein Vermögen K_1 und zusätzlich an Zinsen $\frac{p}{100} \cdot K_1$, insgesamt also $K_2 = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$.

Ebenso zeigt man, dass man nach 3 Jahren $K_3 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$, nach 4 Jahren $K_4 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4$ und nach n Jahren $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ besitzt.

Für jede Verzinsung erhöht sich der Exponent an der Klammer also um 1.

Nun betrachten wir den (aussichtslosen) Fall, dass eine großzügige Bank 100% Zinsen im Jahr gibt.
Legt man bei dieser Bank das Kapital K_0 an, so besitzt man nach einem Jahr
$K_0 \cdot \left(1 + \frac{100}{100}\right)^1 = K_0 \cdot (1+1) = 2 \cdot K_0$.

Da es eigentlich ungerecht ist, dass das Geld zwar das ganze Jahr von der Bank verwaltet wird, es aber erst zum Jahresende Zinsen gibt, verzinst die Bank nun alle Sparkonten halbjährlich, das aber natürlich auch nur zum halben Zinssatz. Statt 100% Zinsen im Jahr gibt es jetzt 50% Zinsen im Halbjahr.

Wenn der Index die Nummer der Verzinsung angibt, so gilt nun:

$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right)^1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^1$ und $K_2 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = K_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \cdot K_0 = 2{,}25 \cdot K_0$.

Auf vielfachen Kundenwunsch erklärt sich die Bank nach einiger Zeit bereit, sogar jeden Monat das Kapital zu $\frac{100}{12}$ % zu verzinsen. Wie hoch ist dann das Kapital K_{12}?

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right)^1 \;;\; K_2 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right)^2 \;;\; K_3 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right)^3 \;;\; \ldots \;;\; K_{12} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2{,}613 \cdot K_0$$

Und bei täglicher Verzinsung zu $\frac{100}{360}$ % ergibt sich:

$$K_1 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{360}\right)^1 \;;\; K_2 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{360}\right)^2 \;;\; K_3 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{360}\right)^3 \;;\; \ldots \;;\; K_{12} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{360}\right)^{360} \approx 2{,}714 \cdot K_0$$

Bei n-facher Verzinsung besitzt man nach der n-ten Verzinsung $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Beim Übergang zu kontinuierlicher Verzinsung geht n gegen Unendlich und es ergibt sich

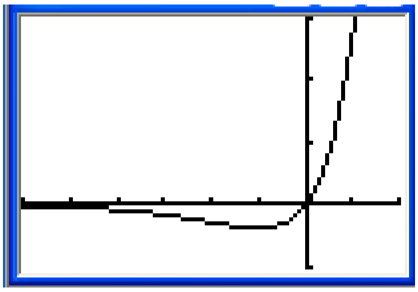
$K_\infty = \lim_{n \to \infty} \left(K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \approx 2{,}718281828 \cdot K_0$. Der Koeffizient von K_0 sieht nicht nur so wie e aus, sondern ist es tatsächlich (siehe http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=910 ; dort findet man auch weitere interessante Möglichkeiten, e zu berechnen).

Es gilt also: $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

3. Betrachtung einer die e-Funktion enthaltenden Funktion

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x)=x\cdot e^x$.

Gesucht sind Nullstellen, Stellen mit waagrechter Tangente und Wendestellen.



1. Ableitung: $f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x=(1+x)\cdot e^x$

2. Ableitung: $f''(x)=1\cdot e^x+(1+x)\cdot e^x=(2+x)\cdot e^x$

Nullstelle: $f(x_N)=0 \rightarrow x_N\cdot e^{x_N}=0 \rightarrow x_N=0$

Extremum: $f'(x_E)=0 \rightarrow (1+x_E)\cdot e^{x_E}=0 \rightarrow x_E=-1$

Wendestelle: $f''(x_W)=0 \rightarrow (2+x_W)\cdot e^{x_W}=0 \rightarrow x_W=-2$

Welchen Inhalt hat die Fläche, die von der Kurve und der x-Achse im Bereich x<0 begrenzt wird?

Zu berechnen ist das Integral $\int\limits_{-\infty}^{0}(x\cdot e^x)\,dx$. Die Produktintegration ist noch nicht bekannt. Man kann aber mit folgender Überlegung die Stammfunktion finden und dann die Gültigkeit durch Ableiten der Stammfunktion nachweisen:

Wie man schon an der 1. und 2. Ableitung sehen kann, gilt vermutlich für die n-te Ableitung:
$f^{(n)}(x)=(n+x)\cdot e^x$

Beweis durch vollständige Induktion:

Für n=1 und n=2 ist die Formel gültig (siehe Rechnung).

Annahme: Es gilt $f^{(k)}(x)=(k+x)\cdot e^x$

Zu zeigen ist: $f^{(k+1)}(x)=((k+1)+x)\cdot e^x$

Ableiten mit Produktregel: $f^{(k+1)}(x)=f^{(k)}{}'(x)=1\cdot e^x+(k+x)\cdot e^x=(1+k+x)\cdot e^x=((k+1)+x)\cdot e^x$

Da das Integrieren die Umkehrung des Ableitens ist und man die Funktion selbst als 0-te Ableitung deuten kann, ist die Stammfunktion die (-1)-te Ableitung. Es gilt also:

$$\int\limits_{-\infty}^{0}(x\cdot e^x)\,dx=\left[(-1+x)\cdot e^x\right]_{-\infty}^{0}=-1$$

Anmerkung: Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to-\infty}(x\cdot e^x)$ ist vom Typ $\infty\cdot 0$ und kann nach Umformung in den Typ $\frac{\infty}{\infty}$ mit der Regel von l'Hospital berechnet werden: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x\cdot e^x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{-x}}\right)\overset{\text{l'Hospital}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{-e^{-x}}\right)=0$

Der Flächeninhalt beträgt also 1 Flächeneinheit und ist übrigens genau so groß wie der Flächeninhalt der Fläche, die vom Graph von $f(x)=e^x$ und der x-Achse im Bereich x<0 eingeschlossen wird:

$$\int\limits_{-\infty}^{0}e^x\,dx=\left[e^x\right]_{-\infty}^{0}=1$$

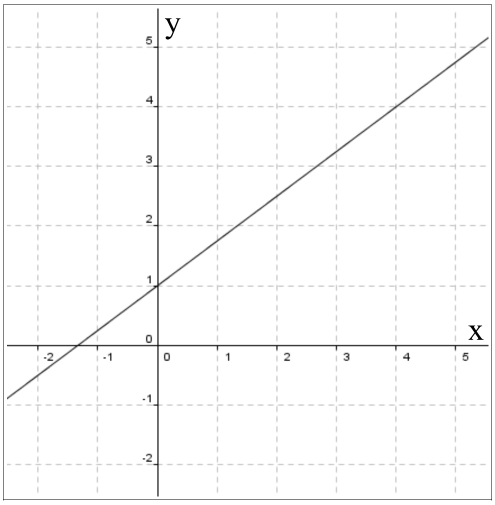
4. ln x als Umkehrfunktion zu e^x

Begriff „Umkehrfunktion“

Wechselt man bei einer Funktion $y = f(x)$ die Bedeutung von y und x, d .h. ist nicht mehr wie ursprünglich x die unabhängige Variable und y der Funktionswert, sondern nun y die unabhängige Variable und x der Funktionswert, so schreibt man $x = f^{-1}(y)$ und nennt f^{-1} die Umkehrfunktion[1] zu *f*.

Da man beim Zeichnen in einem x-y-Koordinatensystem keinen Unterschied zwischen den Graphen von *f* und $\overline{f}$ sehen würde (denn die ursprüngliche Funktionsgleichung wurde ja nur umgestellt), tauscht man auch die Buchstaben für Variable und Funktionswert aus und schreibt dann $y = f^{-1}(x)$ für die Umkehrfunktion.

Das Vorgehen soll am Beispiel der Geradengleichung $y = \frac{3}{4} \cdot x + 1$ deutlich gemacht werden.

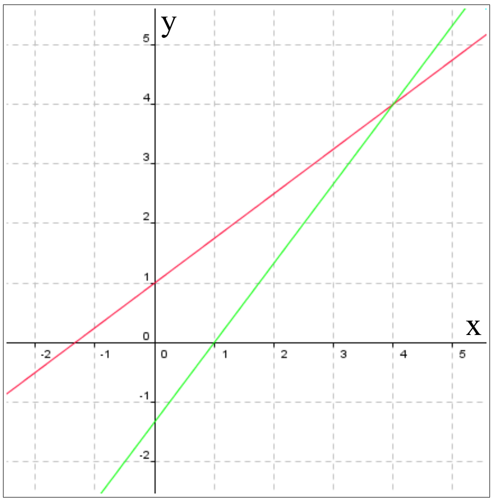


Umformen der Gleichung:

$$y = \frac{3}{4} \cdot x + 1 \;\rightarrow\; y - 1 = \frac{3}{4} \cdot x \;\rightarrow\; x = \frac{4}{3} \cdot (y - 1) \;\rightarrow\; x = \frac{4}{3} \cdot y - \frac{4}{3}$$

Ganz gleich, ob man die Gleichung $y = \frac{3}{4} \cdot x + 1$ oder die Gleichung $x = \frac{4}{3} \cdot y - \frac{4}{3}$ graphisch darstellt, es ergibt sich dieselbe Gerade (x jeweils auf der waagrechten und y auf der senkrechten Achse abtragen).

Werden in der zweiten Gleichung x und y vertauscht, so bedeutet das beim Graphen die Vertauschung der x- und der y-Achse. Das wird durch eine Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden realisiert.



Die Punkte auf der 1. Winkelhalbierenden sind bei beiden Graphen gleich, in diesem Fall z. B. der Punkte (4/4).

In der unteren graphischen Darstellung sind die Funktion $f(x) = y = \frac{3}{4} \cdot x + 1$ in rot und die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = y = \frac{4}{3} \cdot x - \frac{4}{3}$ in grün dargestellt.

Allgemein gilt bei einer Gerade:

$$y = m \cdot x + b \rightarrow y - b = m \cdot x \rightarrow x = \frac{1}{m} \cdot (y - b) \rightarrow x = \frac{1}{m} \cdot y - \frac{b}{m}$$, d. h.

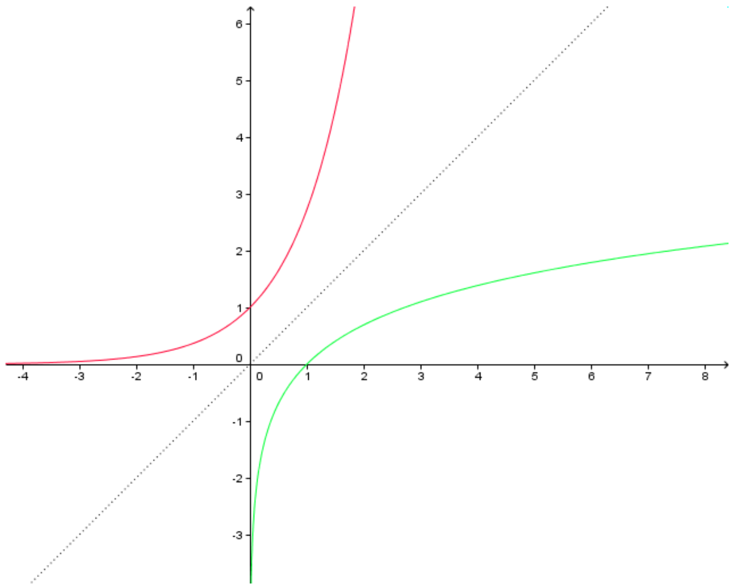
$y = \frac{1}{m} \cdot x - \frac{b}{m}$ ist die Umkehrfunktion.

Die Steigung der Umkehrfunktion ist also gleich dem Kehrwert der Steigung der normalen Funktion. Der y-Achsenabschnitt der Umkehrfunktion ist gleich dem y-Achsenabschnitt der normalen Funktion, dividiert durch die Steigung der normalen Funktion.

1 Manchmal schreibt man die Umkehrfunktion auch als $\overline{f}$.

Der Graph der Funktion $f(x)=\ln x$

Den Graph der Umkehrfunktion (grün) zu $y=e^x$ erhält man, indem man den Graph von $y=e^x$ (rot) an der 1. Winkelhalbierenden spiegelt:



Die Gleichung der Umkehrfunktion erhält man durch Auflösen nach x und Vertauschung der Variablennamen:

$$y=e^x \rightarrow x=\ln y \overset{Variablentausch}{\rightarrow} y=\ln x$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Die Ableitung $f'(x)=\lim_{a\to x}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ schreibt man manchmal auch in der Leibnizschen Schreibweise mit Differentialen als $\frac{dy}{dx}$ und meint damit, dass y nach x abgeleitet wird.

Wie man sieht, stammt die Schreibweise von einem Bruch ab und es lässt sich (wenigstens bei Funktionen, die in der Schule behandelt werden), auch $\frac{dy}{dx}$ als Bruch behandeln. In zahlreichen Fällen (zum Beispiel in der Integralrechnung bei den Themen Substitution, Bogenlänge und Rotationskörper) kann die Verwendung als Bruch die Rechnungen sehr vereinfachen.

So auch bei der Ableitung der Umkehrfunktion:

Wie man leicht nachrechnet, gilt $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.

$\frac{dx}{dy}$ ist dabei die Ableitung der Umkehrfunktion (die Bezeichnungen für x und y werden nach der Umformung nicht ausgetauscht!).

Es gilt also: Die Ableitung der Umkehrfunktion ist der Kehrwert der Ableitung der gegebenen Funktion (siehe oben auf Seite 6 die Steigungen $\frac{3}{4}$ für die Funktion und $\frac{4}{3}$ für die Umkehrfunktion).

Ableitung der Funktion f(x)=ln x

Es gilt $y=\ln x$. Gesucht ist y'. Benutzt wird die Tatsache, dass $y=\ln x \rightarrow x=e^y \rightarrow x'=\frac{dx}{dy}=e^y$

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$ Die Ableitung von $f(x)=\ln x$ ist also $f'(x)=\frac{1}{x}$.

Umgekehrt gilt danach dann $\int \frac{1}{x}dx=\ln x$ (genauer: $\int \frac{1}{x}dx=|\ln x|$).

Hier wird eine Lücke in der bekannten Integrationsformel $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ geschlossen, die für alle $n\in\mathbb{R}$ mit Ausnahme von $n=-1$ gilt $(x^{-1}=\frac{1}{x})$.

5. Allgemeine Exponentialfunktion $f(x)=a^x$ und allgemeine Logarithmusfunktion $f(x)=\log_a x$

Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion $f(x)=a^x$

Zur Ableitung der Exponentialfunktion benutzen wir zunächst die Form $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x_0+h}-a^{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x_0}\cdot a^h-a^{x_0}}{h}=a^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

Weiter oben wurde gezeigt, dass die Ableitung von $f(x)=a^x$ nur dann $f'(x)=a^x$ sein kann, wenn a=e.

Hier muss dann also mit a=e gelten: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$.

Daraus folgt mit $h=\frac{1}{n}$: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=1$

Multiplikation mit $\frac{1}{n}$ gibt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right) \overset{()^n}{\rightarrow} e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Rechts steht die schon auf Seite 4 angegebene Definition für e.

Welchen Wert hat nun aber der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$?

Schreiben wir $a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\cdot\ln a}$, so können wir die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel durchführen:

$(a^x)'=(e^{x\cdot\ln a})'=\ln a\cdot e^{x\cdot\ln a}=\ln a\cdot a^x$

Vergleichen wir mit der Formel $(a^x)'=a^x\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$, so sieht man, dass $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a$.

Für a=e ergibt sich daraus $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\ln e=1$, wie oben schon gezeigt.

Ergebnis: Mit $f(x)=a^x$ gilt $f'(x)=\ln a\cdot a^x$.

Wie leicht zu zeigen ist, folgen daraus die weiteren Ableitungen nach dem Schema $f^{(n)}(x)=\ln^n a\cdot a^x$.

Mit $n=-1$ ergibt sich auch das Integral aus a^x : $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}$

Ableitung der allgemeinen Logarithmusfunktion $f(x)=\log_a x$

Es gilt $f(x)=\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$. Daraus folgt für die Ableitung: $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln a}=\frac{1}{x\cdot\ln a}$.

Integral der allgemeinen Logarithmusfunktion $f(x)=\log_a x$

Zunächst wird das Integral des natürlichen Logarithmus berechnet.
Durch eine hilfreiche Ergänzung (Faktor 1) kann mit Produktintegration die Lösung gefunden werden:

$$\int \ln x\,dx=\int(\underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\ln x}_{v})\,dx=\underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\ln x}_{v}-\int\underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}\,dx=x\cdot\ln x-\int 1\,dx=x\cdot\ln x-x$$

Das Integral der allgemeinen Logarithmusfunktion ergibt sich daraus mit Hilfe der Beziehung
$f(x)=\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$:

$$\int\log_a x\,dx=\int\frac{\ln x}{\ln a}\,dx=\frac{1}{\ln a}\cdot\int\ln x\,dx=\frac{1}{\ln a}\cdot(x\cdot\ln x-x)=x\cdot\frac{\ln x}{\ln a}-\frac{x}{\ln a}=x\cdot\log_a x-\frac{x}{\ln a}$$