

# Beispiel für die Untersuchung einer algebraischen Kurve

Gegeben ist die Gleichung  $x^3 + y^3 - 3x^2 = 0$  [1].

## Schnitte mit den Koordinatenachsen

x-Achse:  $y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 3 \Rightarrow (0/0); (3/0)$

y-Achse:  $x = 0 \Rightarrow y^3 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0/0)$

## Steigungen in den Koordinatenschnittpunkten

$$\frac{d}{dx}: 3x^2 + 3y^2 y' - 6x = 0 \quad [2]$$

$$\frac{d}{dy}: 3x^2 x' + 3y^2 - 6x x' = 0 \quad [3]$$

Der Punkt (0/0) liefert in beiden Ableitungen kein Ergebnis. Das Verhalten der Kurve bei (0/0) muss also noch gesondert untersucht werden.

(3/0) bei [3] eingesetzt ergibt  $3 \cdot 9 \cdot x' + 3 \cdot 0 - 6 \cdot 3 \cdot x' = 0 \Rightarrow 27x' - 18x' = 0 \Rightarrow x' = 0$   
Die Kurve verläuft im Punkt (3/0) also senkrecht.

## waagrechte Tangenten

In [2] wird  $y' = 0$  gesetzt. Daraus folgt  $3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$   
 $x_1 = 0$  wird noch untersucht.

$x_2 = 2$  in [1] eingesetzt ergibt  $8 + y^3 - 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow 8 + y^3 - 12 = 0 \Rightarrow y^3 = 4 \Rightarrow y = \sqrt[3]{4}$ ,  
also waagrechte Tangente im Punkt  $(2/\sqrt[3]{4})$ .

## senkrechte Tangenten

In [3] wird  $x' = 0$  gesetzt. Daraus folgt  $3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ , d.h. auf der x-Achse kann es senkrechte Tangenten geben. Punkt (0/0) fällt zunächst mal weg, aber im Punkt (3/0) ist dann eine senkrechte Tangente vorhanden.

## Verhalten der Kurve bei $x = 0$ , d.h. im Punkt (0/0)

Die Kurve wird linearisiert durch den Ansatz  $y = m \cdot x$ .

Einsetzen in [1] liefert  $x^3 + (m \cdot x)^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^3 + m^3 \cdot x^3 - 3x^2 = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Rightarrow} x + m^3 x - 3 = 0$   
 $\Rightarrow m^3 = \frac{3-x}{x} = \frac{3}{x} - 1$ . Für  $x \rightarrow 0$  geht  $m$  gegen  $\infty$ . Also verläuft die Kurve bei (0/0) senkrecht.

## Verhalten der Kurve für $x \rightarrow \pm\infty$ , Untersuchung auf Asymptote

Die Kurve wird linearisiert durch den Ansatz  $y = m \cdot x + c$ .

Einsetzen in [1] liefert

$$x^3 + (m \cdot x + c)^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^3 + m^3 x^3 + 3m^2 c x^2 + 3m c^2 x + c^3 - 3x^2 = 0$$

[4]

$$x^3 \cdot (1 + m^3) + x^2 \cdot (3m^2c - 3) + x \cdot (3mc^2) + c^3 = 0 \Rightarrow (1 + m^3) + \frac{3m^2c - 3}{x} + \frac{3mc^2}{x^2} + \frac{c^3}{x^3} = 0$$

Für  $x \rightarrow \infty$  werden die Brüche zu 0 und es bleibt stehen  $1 + m^3 = 0 \Rightarrow m^3 = -1 \Rightarrow m = -1$ .

In [4] eingesetzt gibt das  $x^3 \cdot (1 - 1) + x^2 \cdot (3c - 3) + x \cdot (-3c^2) + c^3 = 0 \Rightarrow$

$$x^2 \cdot (3c - 3) + x \cdot (-3c^2) + c^3 = 0 \Rightarrow (3c - 3) + \frac{-3c^2}{x} + \frac{c^3}{x^2} = 0$$

Für  $x \rightarrow \infty$  werden die Brüche zu 0 und es bleibt stehen  $3c - 3 = 0 \Rightarrow c = 1$

Also gibt es eine schräge Asymptote mit der Gleichung  $y = -x + 1$  [5]

### Schneidet die Kurve die Asymptote im Endlichen?

[5] wird in [1] eingesetzt:  $x^3 + (-x + 1)^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow$   
 $-3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$  [6]

Den zugehörigen y-Wert erhält man, wenn man [6] in [1] einsetzt:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + y^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{27} + y^3 - \frac{3}{9} = 0 \Rightarrow \frac{1}{27} + y^3 - \frac{9}{27} = 0 \Rightarrow y^3 - \frac{8}{27} = 0 \Rightarrow$$

$$y^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow y = \frac{2}{3}. \text{ Die Asymptote wird von der Kurve also in } \left(\frac{1}{3} / \frac{2}{3}\right) \text{ geschnitten.}$$

### Zusammenfassung und Graph

(0/0) liegt unterhalb und (3/0) oberhalb der Asymptote. Die Kurve schneidet die Asymptote nur in einem Punkt. Deshalb liegt links vom Schnittpunkt die Kurve vollständig unterhalb und rechts vollständig oberhalb der Asymptote.

Formt man [1] zu

$y^3 = 3x^2 - x^3 = x^2 \cdot (3 - x)$  um, erkennt man, dass für  $x < 3$  die y-Werte positiv und für  $x > 3$  negativ sein müssen. Da der Punkt (0/0) angenommen wird und die Kurve dort senkrecht verläuft, in der Umgebung von (0/0) aber keine negativen y-Werte vorkommen, muss bei (0/0) eine Spitze vorliegen.

