Vektorprodukt

Beim Umwandeln einer Ebenengleichung aus der Parameterform in die Normalenform (oder auch Hessesche Normalenform) ist die zentrale Aufgabe, zu zwei gegebenen Vektoren einen Vektor zu finden, der senkrecht zu den gegebenen Vektoren steht. Die Rechnung läuft über die Lösung eines Gleichungssystems mit 2 Gleichungen und 3 Variablen.

Da die Berechnung etwas umfangreicher ist, aber immer nach demselben Schema abläuft, lohnt es sich, einmal eine allgemeine Rechnung durchzuführen[1] und dann auf Grund des Ergebnisses eine einfach zu merkende Formel zu finden, die das Problem schnell löst.

Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

Gesucht ist der zu beiden Vektoren senkrechte Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$.

Es muss also gelten:

$$\vec{a}*\vec{n}=0 \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=a_1\cdot n_1+a_2\cdot n_2+a_3\cdot n_3=0 \quad \text{und} \quad \vec{b}*\vec{n}=0 \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=b_1\cdot n_1+b_2\cdot n_2+b_3\cdot n_3=0$$

Zu lösen ist also das Gleichungssystem $\left\{\begin{matrix}a_1\cdot n_1+a_2\cdot n_2+a_3\cdot n_3=0\\ b_1\cdot n_1+b_2\cdot n_2+b_3\cdot n_3=0\end{matrix}\right\}$.

Da das Gleichungssystem unterbestimmt ist, kann eine der Variablen frei gewählt werden. Es sei $n_3=1$.

$$\left\{\begin{matrix}a_1\cdot n_1+a_2\cdot n_2=-a_3\\ b_1\cdot n_1+b_2\cdot n_2=-b_3\end{matrix}\right\}\begin{matrix}|\cdot b_2\\ |\cdot a_2\end{matrix} \rightarrow \left\{\begin{matrix}a_1\cdot b_2\cdot n_1+a_2\cdot b_2\cdot n_2=-a_3\cdot b_2\\ a_2\cdot b_1\cdot n_1+a_2\cdot b_2\cdot n_2=-a_2\cdot b_3\end{matrix}\right\}\downarrow- \;\rightarrow\; a_1\cdot b_2\cdot n_1-a_2\cdot b_1\cdot n_1=-a_3\cdot b_2+a_2\cdot b_3 \;\rightarrow$$

$$n_1=\frac{-a_3\cdot b_2+a_2\cdot b_3}{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1}=\frac{a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2}{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1}$$

$$\left\{\begin{matrix}a_1\cdot n_1+a_2\cdot n_2=-a_3\\ b_1\cdot n_1+b_2\cdot n_2=-b_3\end{matrix}\right\}\begin{matrix}|\cdot b_1\\ |\cdot a_1\end{matrix} \rightarrow \left\{\begin{matrix}a_1\cdot b_1\cdot n_1+a_2\cdot b_1\cdot n_2=-a_3\cdot b_1\\ a_1\cdot b_1\cdot n_1+a_1\cdot b_2\cdot n_2=-a_1\cdot b_3\end{matrix}\right\}\uparrow- \;\rightarrow\; a_1\cdot b_2\cdot n_2-a_2\cdot b_1\cdot n_2=-a_1\cdot b_3+a_3\cdot b_1 \;\rightarrow$$

$$n_2=\frac{-a_1\cdot b_3+a_3\cdot b_1}{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1}=\frac{a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3}{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1}$$

Es ergibt sich also der zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrechte Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}\frac{a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2}{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1}\\ \frac{a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3}{a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1}\\ 1\end{pmatrix}$

Da es nicht auf die Länge des Vektors ankommt, kann man diesen mit einer beliebigen Zahl multiplizieren.

Hier wird gewählt der Faktor $a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1$.

Damit ergibt sich ein neuer Vektor, der der Einfachheit halber wieder $\vec{n}$ genannt wird:

1 Erinnert sei an ein ähnliches Vorgehen bei der p-q-Formel, den Binomischen Formeln usw.

$\vec{n}=\begin{pmatrix} a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3 \\ a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1 \end{pmatrix}$ Dieser Vektor ist senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie folgende Skalarprodukte zeigen:

$$\vec{a}*\vec{n}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3 \\ a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1 \end{pmatrix}=a_1 a_2 b_3-a_1 a_3 b_2+a_2 a_3 b_1-a_1 a_2 b_3+a_1 a_3 b_2-a_2 a_3 b_1=0$$

$$\vec{b}*\vec{n}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3 \\ a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1 \end{pmatrix}=a_2 b_1 b_3-a_3 b_1 b_2+a_3 b_1 b_2-a_1 b_2 b_3+a_1 b_2 b_3-a_2 b_1 b_3=0$$

Aus den oben durchgeführten Überlegungen ergibt sich die **Definition des Vektorprodukts**

Das Vektorprodukt ($\times$)zweier 3-dimensionaler Vektoren ergibt einen Vektor, der senkrecht auf den beiden Vektoren steht und der nach folgender Regel gebildet wird:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3 \\ a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Damit man bei der Bildung des Ergebnisvektors nicht durcheinander kommt, kann man sich an folgendem Schema orientieren. Dazu schreibt man sich die beiden Vektoren zweimal untereinander:

1. Komponente $a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2$ 2. Komponente $a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3$ 3. Komponente $a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1$

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array}$$

es gilt jeweils die Rechenregel „links oben mal rechts unten minus links unten mal rechts oben“

Einige Gesetzmäßigkeiten zum Vektorprodukt

- Das Vektorprodukt zweier paralleler Vektoren ergibt den 0-Vektor:
  Falls $\vec{a}\|\vec{b}$, gilt $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$
- Das Vektorprodukt zweier senkrechter Vektoren ergibt einen Vektor, dessen Länge gleich dem Produkt der Länge der beiden anderen Vektoren ist:
  Falls $\vec{a}\perp\vec{b}$, gilt $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$
- Das Vektorprodukt zweier Vektoren, die einen Winkel α einschließen, ergibt einen Vektor mit der Länge
  $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$
- Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ! Es kommt auf die Reihenfolge der Faktoren an:
  $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
  Die Lage des Ergebnisvektors kann man sich mit Hilfe der <u>rechten</u> Hand veranschaulichen:
  Der Daumen zeigt in die Richtung des ersten Faktors.
  Der Zeigefinger zeigt in die Richtung des zweiten Faktors.
  Der Mittelfinger zeigt in Richtung des Ergebnisvektors.
  Bei zahlreichen Anwendungen in der Physik wird diese 3-Finger-Regel benutzt.