

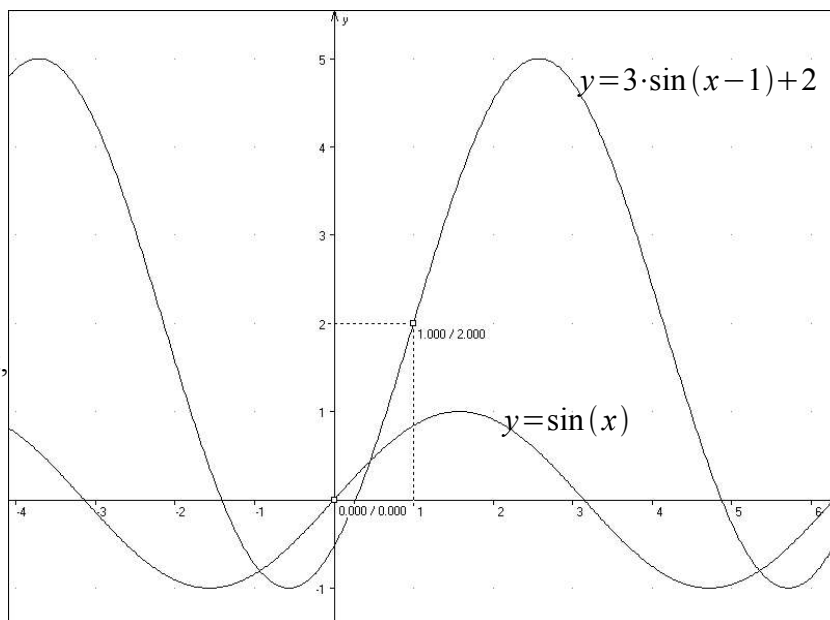
Verschieben von Graphen im Koordinatensystem

Ist der Graph einer Funktion mit $y=f(x)$ gegeben, so lässt sich der um den Faktor a gestreckte und um b in x -Richtung und um c in y -Richtung verschobene Graph beschreiben durch $y=a \cdot f(x-b)+c$.

Beispiel:

Die Kurve für $y=\sin(x)$ wird zur Kurve für $y=3 \cdot \sin(x-1)+2$, indem sie

- um den Faktor 3 gestreckt wird, zu erkennen daran, dass der Abstand zwischen tiefstem und höchstem Punkt der Kurve (Amplitude) von 2 auf 6 wächst,
- um 1 nach rechts verschoben und
- um 2 nach oben verschoben wird, zu erkennen an den eingezeichneten Punkten.



Aufstellen von Geradengleichungen

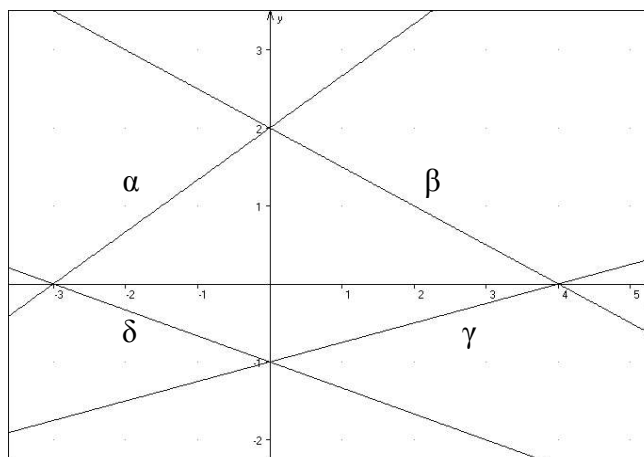
a) aus gegebenen Graphen

$$\alpha : y = \frac{2}{3} \cdot x + 2$$

$$\beta : y = -\frac{1}{2} \cdot x + 2$$

$$\gamma : y = \frac{1}{4} \cdot x - 1$$

$$\delta : y = -\frac{1}{3} \cdot x - 1$$



b) aus den Koordinaten zweier bekannter Punkte

Gegeben sind die Punkte $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$.

Dann bestimmt man die Steigung aus $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow y = m \cdot x + c = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + c$.

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes (P_1 oder P_2) für x und y erhält man eine Gleichung, aus der man c bestimmen kann.

Beispiel: Gegeben sind die Punkte $P_1 = (-2/5)$ und $P_2 = (4/9)$. Also $m = \frac{9-5}{4-(-2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Koordinaten des Punktes P_2 einsetzen in $y = \frac{2}{3} \cdot x + c$ ergibt:

$$9 = \frac{2}{3} \cdot 4 + c \Rightarrow 9 - \frac{8}{3} = c \Rightarrow \frac{19}{3} = c. \text{ Die gesuchte Gleichung ist also } y = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{19}{3}.$$

c) wenn die Koordinaten eines Punktes und die Steigung gegeben sind

Gegeben sind der Punkt $P_1(x_1/y_1)$ und die Steigung m_1 .

Dann setzt man die Koordinaten von P in die Gleichung $y = m \cdot x + c$ ein und berechnet c:

$$y_1 = m_1 \cdot x_1 + c \Rightarrow c = y_1 - m_1 \cdot x_1. \text{ Die gesuchte Gleichung ist also } y = m_1 \cdot x + y_1 - m_1 \cdot x_1.$$

Beispiel: Gegeben ist der Punkt $P(5/-12)$ und die Steigung $m = \frac{2}{7}$.

$$\text{Die Koordinaten von } P \text{ und } m \text{ in } y = m \cdot x + c \text{ einsetzen: } -12 = \frac{2}{7} \cdot 5 + c \Rightarrow -12 - \frac{10}{7} = c \Rightarrow -\frac{94}{7} = c$$

$$\text{Die Geradengleichung ist also: } y = \frac{2}{7} \cdot x - \frac{94}{7}.$$

Parallele und Normale

Parallelen sind Geraden mit der selben Steigung aber verschiedenem y-Achsenabschnitt.

Beispiel: $y = \frac{2}{3} \cdot x + 5$ und $y = \frac{2}{3} \cdot x - 2$ sind Gleichungen für zwei parallele Geraden.

Eine Normale steht senkrecht zu einer Geraden. Ihre Steigung ermittelt man, indem man von der Steigung der Geraden den Kehrwert bildet und das Vorzeichen wechselt.

Ist m_G die Steigung der Geraden und m_N die Steigung der Normale, so gilt $m_N = -\frac{1}{m_G}$.

Beispiel: Zur Geraden $y = -\frac{5}{9} \cdot x + 1$ ist $y = \frac{9}{5} \cdot x - 5$ eine mögliche Normale.

Beispiel-Aufgabe zu Gerade, Parallele und Normale

Eine Gerade schneidet die x-Achse bei -7 und läuft durch den Punkt P(2/5). Berechnen Sie die Gleichungen der Parallelen und der Normalen zu dieser Gerade, die beide durch den Punkt Q(4/-2) laufen.

Aufstellen der Geradengleichung: Gegeben sind die Punkte S(-7/0) und P(2/5).

Steigung: $m = \frac{5-0}{2-(-7)} = \frac{5}{9}$. Koordinaten von S in die Gleichung $y = \frac{5}{9} \cdot x + c$ einsetzen:

$$0 = \frac{5}{9} \cdot (-7) + c \Rightarrow c = \frac{35}{9}, \text{ also Geradengleichung: } y = \frac{5}{9} \cdot x + \frac{35}{9}.$$

Die Parallele soll durch Q(4/-2) verlaufen. Ihre Steigung stimmt mit der der Geraden überein, also

$$\text{muss nur noch der c-Wert bestimmt werden: } -2 = \frac{5}{9} \cdot 4 + c \Rightarrow c = -2 - \frac{20}{9} \Rightarrow c = -\frac{38}{9}.$$

$$\text{Die Gleichung der Parallele ist also } y = \frac{5}{9} \cdot x - \frac{38}{9}.$$

Die Normale soll auch durch Q(4/-2) verlaufen. Ihre Steigung ergibt sich aus der Steigung $m_G = \frac{5}{9}$

der Geraden zu $m_N = -\frac{9}{5}$. Bestimmung des c-Wertes durch Einsetzen der Koordinaten von Q:

$$-2 = -\frac{9}{5} \cdot 4 + c \Rightarrow c = -2 + \frac{36}{5} \Rightarrow c = \frac{26}{5}. \text{ Normalengleichung: } y = -\frac{9}{5} \cdot x + \frac{26}{5}.$$

Betragsfunktion

Definition: $|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ Beispiele: $|4| = 4$; $|-3| = -(-3) = +3$

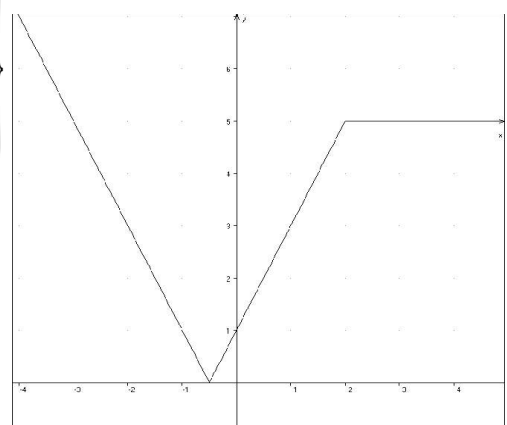
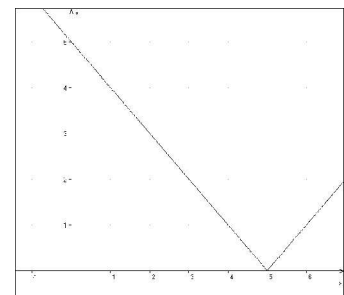
Aufgaben:

Schreibe $|5-x|$ ohne Betragstriche: $|5-x| = \begin{cases} 5-x, & \text{falls } x \leq 5 \\ x-5, & \text{falls } x > 5 \end{cases}$

Schreibe $|3-|x-2|+x|$ ohne Betragstriche:

$$|3-|x-2|+x| = \begin{cases} |3-x+2+x|, & \text{falls } x \geq 2 \\ |3+x-2+x|, & \text{falls } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 5, & \text{falls } x \geq 2 \\ |1+2x|, & \text{falls } x < 2 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} 5, & \text{falls } x \geq 2 \\ 1+2x, & \text{falls } x < 2 \text{ und } x \geq -\frac{1}{2} \\ -1-2x, & \text{falls } x < 2 \text{ und } x < -\frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 5, & \text{falls } x \geq 2 \\ 1+2x, & \text{falls } -\frac{1}{2} \leq x < 2 \\ -1-2x, & \text{falls } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$



Winkel im Dreieck bestimmen

Für die Steigung m einer Geraden und ihren Anstiegswinkel α gilt folgender Zusammenhang: $m = \tan \alpha$

Berechnung der Teilwinkel:

$$\tan \alpha_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = 26,6^\circ$$

$$\tan \alpha_2 = -1 \Rightarrow \alpha_2 = -45,0^\circ$$

$$\tan \beta_1 = 4 \Rightarrow \beta_1 = 76,0^\circ$$

$$\beta_2 = \alpha_2 = -45,0^\circ$$

$$\gamma_1 = \beta_1 = 76,0^\circ$$

$$\gamma_2 = \alpha_1 = 26,6^\circ$$

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 26,6^\circ + 45,0^\circ = 71,6^\circ$$

$$\beta = 180,0^\circ - \beta_1 - \beta_2 = 180,0^\circ - (76,0^\circ + 45,0^\circ) = 180,0^\circ - 121,0^\circ = 59,0^\circ$$

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 = 76,0^\circ - 26,6^\circ = 49,4^\circ$$

