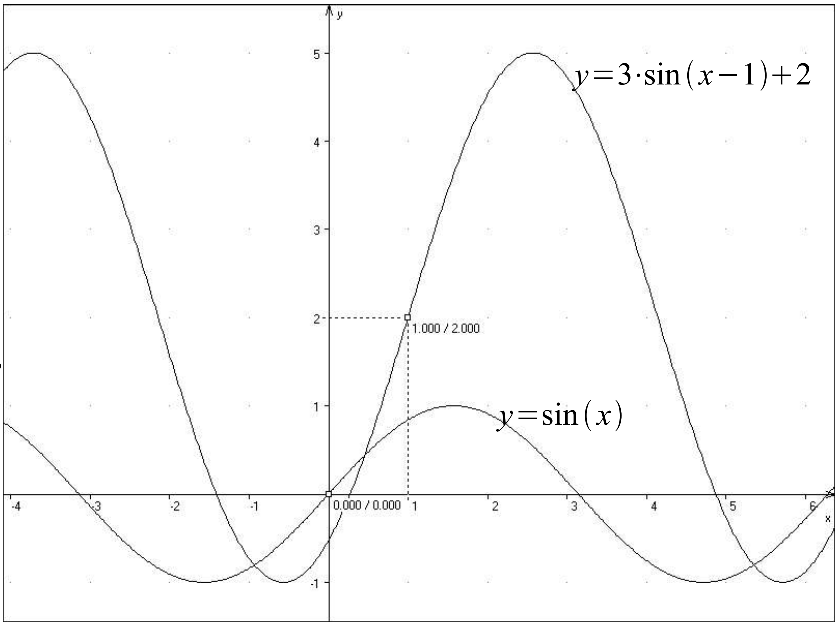
Verschieben von Graphen im Koordinatensystem

Ist der Graph einer Funktion mit $y=f(x)$ gegeben, so lässt sich der um den Faktor *a* gestreckte und um *b* in x-Richtung und um *c* in y-Richtung verschobene Graph beschreiben durch $y=a\cdot f(x-b)+c$.

Beispiel:

Die Kurve für $y=\sin(x)$ wird zur Kurve für $y=3\cdot\sin(x-1)+2$, indem sie

- um den Faktor 3 gestreckt wird, zu erkennen daran, dass der Abstand zwischen tiefstem und höchstem Punkt der Kurve (Amplitude) von 2 auf 6 wächst,
- um 1 nach rechts verschoben und
- um 2 nach oben verschoben wird, zu erkennen an den eingezeichneten Punkten.



Aufstellen von Geradengleichungen

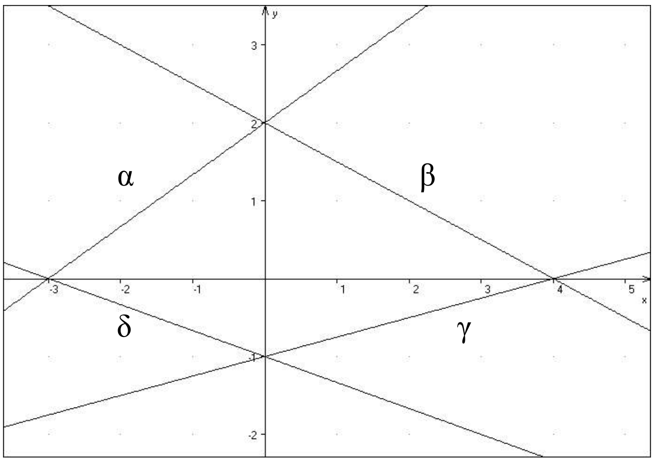
a) aus gegebenen Graphen

α : $y=\frac{2}{3}\cdot x+2$

β : $y=-\frac{1}{2}\cdot x+2$

γ : $y=\frac{1}{4}\cdot x-1$

δ : $y=-\frac{1}{3}\cdot x-1$



b) aus den Koordinaten zweier bekannter Punkte

Gegeben sind die Punkte $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$.

Dann bestimmt man die Steigung aus $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow y=m\cdot x+c=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x+c$.

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes (P_1 oder P_2) für x und y erhält man eine Gleichung, aus der man c bestimmen kann.

Beispiel: Gegeben sind die Punkte $P_1=(-2/5)$ und $P_2=(4/9)$. Also $m=\frac{9-5}{4-(-2)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Koordinaten des Punktes P_2 einsetzen in $y=\frac{2}{3}\cdot x+c$ ergibt:

$9=\frac{2}{3}\cdot 4+c \Rightarrow 9-\frac{8}{3}=c \Rightarrow \frac{19}{3}=c$. Die gesuchte Gleichung ist also $y=\frac{2}{3}\cdot x+\frac{19}{3}$.

---

c) wenn die Koordinaten eines Punktes und die Steigung gegeben sind

Gegeben sind der Punkt $P_1(x_1/y_1)$ und die Steigung m_1.
Dann setzt man die Koordinaten von P in die Gleichung $y=m\cdot x+c$ ein und berechnet c:
$y_1=m_1\cdot x_1+c \Rightarrow c=y_1-m_1\cdot x_1$. Die gesuchte Gleichung ist also $y=m_1\cdot x+y_1-m_1\cdot x_1$.

Beispiel: Gegeben ist der Punkt $P(5/-12)$ und die Steigung $m=\frac{2}{7}$.

Die Koordinaten von P und m in $y=m\cdot x+c$ einsetzen: $-12=\frac{2}{7}\cdot 5+c \Rightarrow -12-\frac{10}{7}=c \Rightarrow -\frac{94}{7}=c$

Die Geradengleichung ist also: $y=\frac{2}{7}\cdot x-\frac{94}{7}$.

Parallele und Normale

Parallelen sind Geraden mit der selben Steigung aber verschiedenem y-Achsenabschnitt.
Beispiel: $y=\frac{2}{3}\cdot x+5$ und $y=\frac{2}{3}\cdot x-2$ sind Gleichungen für zwei parallele Geraden .

Eine Normale steht senkrecht zu einer Geraden. Ihre Steigung ermittelt man, indem man von der Steigung der Geraden den Kehrwert bildet und das Vorzeichen wechselt.

Ist m_G die Steigung der Geraden und m_N die Steigung der Normale, so gilt $m_N=-\frac{1}{m_G}$.

Beispiel: Zur Geraden $y=-\frac{5}{9}\cdot x+1$ ist $y=\frac{9}{5}\cdot x-5$ eine mögliche Normale.

Beispiel-Aufgabe zu Gerade, Parallele und Normale

Eine Gerade schneidet die x-Achse bei -7 und läuft durch den Punkt P(2/5). Berechnen Sie die Gleichungen der Parallelen und der Normalen zu dieser Gerade, die beide durch den Punkt Q(4/-2) laufen.

Aufstellen der Geradengleichung: Gegeben sind die Punkte S(-7/0) und P(2/5).

Steigung: $m=\frac{5-0}{2-(-7)}=\frac{5}{9}$. Koordinaten von S in die Gleichung $y=\frac{5}{9}\cdot x+c$ einsetzen:

$0=\frac{5}{9}\cdot(-7)+c \;\Rightarrow\; c=\frac{35}{9}$, also Geradengleichung: $y=\frac{5}{9}\cdot x+\frac{35}{9}$.

Die Parallele soll durch Q(4/-2) verlaufen. Ihre Steigung stimmt mit der der Geraden überein, also muss nur noch der c-Wert bestimmte werden: $-2=\frac{5}{9}\cdot 4+c \;\Rightarrow\; c=-2-\frac{20}{9} \;\Rightarrow\; c=-\frac{38}{9}$.

Die Gleichung der Parallele ist also $y=\frac{5}{9}\cdot x-\frac{38}{9}$.

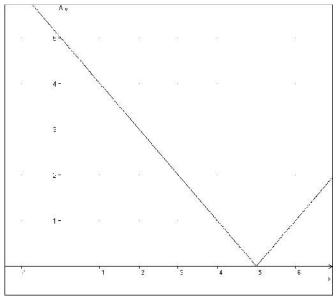
Die Normale soll auch durch Q(4/-2) verlaufen. Ihre Steigung ergibt sich aus der Steigung $m_G=\frac{5}{9}$ der Geraden zu $m_N=-\frac{9}{5}$. Bestimmung des c-Wertes durch Einsetzen der Koordinaten von Q:

$-2=-\frac{9}{5}\cdot 4+c \;\Rightarrow\; c=-2+\frac{36}{5} \;\Rightarrow\; c=\frac{26}{5}$. Normalengleichung: $y=-\frac{9}{5}\cdot x+\frac{26}{5}$.

Betragsfunktion

Definition: $|x|=\begin{cases} x\,,\ falls\ x\geq 0 \\ -x\,,\ falls\ x<0 \end{cases}$ Beispiele: $|4|=4\ ;\ |-3|=-(-3)=+3$

Aufgaben:

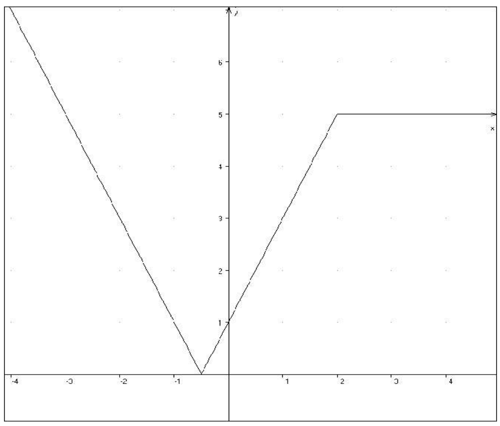


Schreibe $|5-x|$ ohne Betragstriche: $|5-x|=\begin{cases} 5-x\,,\ falls\ x\leq 5 \\ x-5\,,\ falls\ x>5 \end{cases}$

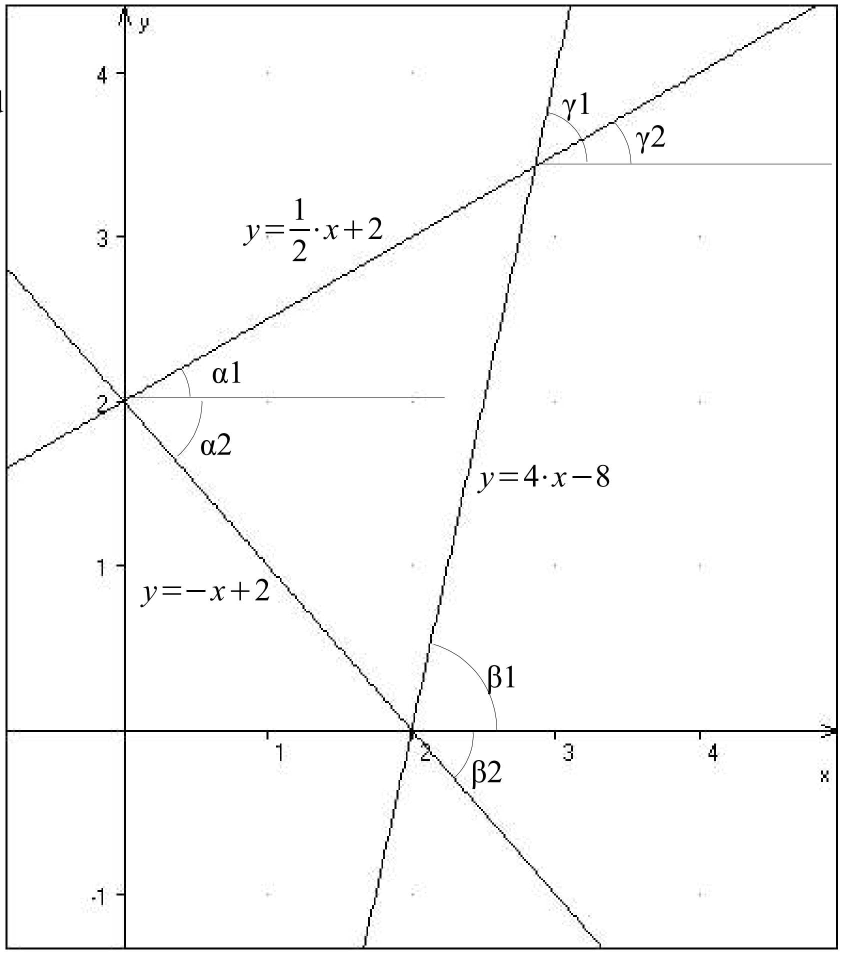
Schreibe $\big|3-|x-2|+x\big|$ ohne Betragstriche:

$$\big|3-|x-2|+x\big|=\begin{cases} |3-x+2+x|,\ falls\ x\geq 2 \\ |3+x-2+x|,\ falls\ x<2 \end{cases}=\begin{cases} 5\,,\ falls\ x\geq 2 \\ |1+2x|,\ falls\ x<2 \end{cases}=$$

$$\begin{cases} 5\,,\ falls\ x\geq 2 \\ 1+2x\,,\ falls\ x<2\ und\ x\geq -\frac{1}{2} \\ -1-2x\,,\ falls\ x<2\ und\ x<-\frac{1}{2} \end{cases}=\begin{cases} 5\,,\ falls\ x\geq 2 \\ 1+2x\,,\ falls -\frac{1}{2}\leq x<2 \\ -1-2x\,,\ falls\ x<-\frac{1}{2} \end{cases}$$



Winkel im Dreieck bestimmen



Für die Steigung m einer Geraden und ihren Anstiegswinkel α gilt folgender Zusammenhang: $m=\tan\alpha$

Berechnung der Teilwinkel:

$\tan\alpha_1=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \alpha_1=26{,}6°$

$\tan\alpha_2=-1 \;\Rightarrow\; \alpha_2=-45{,}0°$

$\tan\beta_1=4 \;\Rightarrow\; \beta_1=76{,}0°$

$\beta_2=\alpha_2=-45{,}0°$

$\gamma_1=\beta_1=76{,}0°$

$\gamma_2=\alpha_1=26{,}6°$

$\alpha=\alpha_1-\alpha_2=26{,}6°+45{,}0°=71{,}6°$

$\beta=180{,}0°-\beta_1-\beta_2=180{,}0°-(76{,}0°+45{,}0°)=180{,}0°-121{,}0°=59{,}0°$

$\gamma=\gamma_1-\gamma_2=76{,}0°-26{,}6°=49{,}4°$