# Monotonie einer Folge

Definition:

Eine Folge heißt monoton steigend, wenn für alle n gilt $a_n \leq a_{n+1}$ .

Eine Folge heißt streng monoton steigend, wenn für alle n gilt $a_n < a_{n+1}$ .

Eine Folge heißt monoton fallend, wenn für alle n gilt $a_n \geq a_{n+1}$ .

Eine Folge heißt streng monoton fallend, wenn für alle n gilt $a_n > a_{n+1}$ .

---

3b)

Gegeben ist die Folge mit $a_n = \frac{3n-1}{n+3}$ .

Um das Monotonieverhalten der Folge zu finden, werden die ersten Folgenglieder gebildet:

$a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ; $a_2 = \frac{5}{5} = 1$ ; $a_3 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ Vermutung: die Folge steigt streng monoton.

Überprüfung:

$$a_n \overset{?}{<} a_{n+1} \Rightarrow \frac{3n-1}{n+3} \overset{?}{<} \frac{3(n+1)-1}{(n+1)+3} \Rightarrow \frac{3n-1}{n+3} \overset{?}{<} \frac{3n+2}{n+4} \Rightarrow (3n-1)\cdot(n+4) \overset{?}{<} (3n+2)\cdot(n+3) \Rightarrow$$

$$3n^2 + 12n - n - 4 \overset{?}{<} 3n^2 + 9n + 2n + 6 \Rightarrow 11n - 4 \overset{?}{<} 11n + 6 \Rightarrow -4 \overset{!}{<} 6$$

Da die Ungleichung für alle n richtig ist, ist die Folge streng monoton steigend.

---

3c)

$a_n = n^2 - n$

$a_1 = 1 - 1 = 0$ ; $a_2 = 4 - 2 = 2$ ; $a_3 = 9 - 3 = 6$ Vermutung: die Folge steigt streng monoton.

Überprüfung:

$$a_n \overset{?}{<} a_{n+1} \Rightarrow n^2 - n \overset{?}{<} (n+1)^2 - (n+1) \Rightarrow n^2 - n \overset{?}{<} n^2 + 2n + 1 - n - 1 \Rightarrow n^2 - n \overset{?}{<} n^2 + n \Rightarrow -n \overset{!}{<} n$$

Da diese Ungleichung für alle n (n ist ja positiv!) erfüllt ist, ist die Folge streng monoton steigend.

---

3e)

$a_n = \frac{n}{n^2+1}$

$a_1 = \frac{1}{2}$ ; $a_2 = \frac{2}{5}$ ; $a_3 = \frac{3}{10}$ Vermutung: die Folge ist streng monoton fallend.

Überprüfung:

$a_n \overset{?}{>} a_{n+1} \;\Rightarrow\; \frac{n}{n^2+1} \overset{?}{>} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \;\Rightarrow\; \frac{n}{n^2+1} \overset{?}{>} \frac{n+1}{n^2+2n+2} \;\Rightarrow$

$n^3+2n^2+2n \overset{?}{>} n^3+n+n^2+1 \;\Rightarrow\; 2n^2+2n \overset{?}{>} n^2+n+1 \;\Rightarrow\; n^2+n \overset{?}{>} 1$

Da n größer oder gleich 1 ist, steht links auf alle Fälle eine Zahl größer als 1. Damit ist die Ungleichung für alle n erfüllt, die Folge ist also streng monoton fallend.

---

4b)

$a_n = n^2 - 12n$

$a_1 = 1-12 = -11$ ; $a_2 = 4-24 = -20$ ; $a_3 = 9-36 = -27$

Die Folge scheint streng monoton fallend zu sein.

Überprüfung:

$a_n \overset{?}{>} a_{n+1} \;\Rightarrow\; n^2-12n \overset{?}{>} (n+1)^2-12(n+1) \;\Rightarrow\; n^2-12n \overset{?}{>} n^2+2n+1-12n-12 \;\Rightarrow$

$n^2-12n \overset{?}{>} n^2-10n-11 \;\Rightarrow\; -12n \overset{?}{>} -10n-11 \;\Rightarrow\; 11 \overset{?}{>} 2n$

Diese Ungleichung gilt nicht für alle n, sondern nur für n-Wert von 1 bis 5.

Ab n=6 gilt 11< 2n, d.h. ab n=6 ist die Folge streng monoton steigend.