

# Monotonie einer Folge

Definition:

Eine Folge heißt monoton steigend, wenn für alle  $n$  gilt  $a_n \leq a_{n+1}$ .

Eine Folge heißt streng monoton steigend, wenn für alle  $n$  gilt  $a_n < a_{n+1}$ .

Eine Folge heißt monoton fallend, wenn für alle  $n$  gilt  $a_n \geq a_{n+1}$ .

Eine Folge heißt streng monoton fallend, wenn für alle  $n$  gilt  $a_n > a_{n+1}$ .

---

3b)

Gegeben ist die Folge mit  $a_n = \frac{3n-1}{n+3}$ .

Um das Monotonieverhalten der Folge zu finden, werden die ersten Folgenglieder gebildet:

$$a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} ; a_2 = \frac{5}{5} = 1 ; a_3 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad \text{Vermutung: die Folge steigt streng monoton.}$$

Überprüfung:

$$a_n < a_{n+1} \Rightarrow \frac{3n-1}{n+3} < \frac{3(n+1)-1}{(n+1)+3} \Rightarrow \frac{3n-1}{n+3} < \frac{3n+2}{n+4} \Rightarrow (3n-1) \cdot (n+4) < (3n+2) \cdot (n+3) \Rightarrow$$

$$3n^2 + 12n - n - 4 < 3n^2 + 9n + 2n + 6 \Rightarrow 11n - 4 < 11n + 6 \Rightarrow -4 < 6$$

Da die Ungleichung für alle  $n$  richtig ist, ist die Folge streng monoton steigend.

---

3c)

$$a_n = n^2 - n$$

$$a_1 = 1 - 1 = 0 ; a_2 = 4 - 2 = 2 ; a_3 = 9 - 3 = 6 \quad \text{Vermutung: die Folge steigt streng monoton.}$$

Überprüfung:

$$a_n < a_{n+1} \Rightarrow n^2 - n < (n+1)^2 - (n+1) \Rightarrow n^2 - n < n^2 + 2n + 1 - n - 1 \Rightarrow n^2 - n < n^2 + n \Rightarrow -n < n$$

Da diese Ungleichung für alle  $n$  ( $n$  ist ja positiv!) erfüllt ist, ist die Folge streng monoton steigend.

3e)

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} ; a_2 = \frac{2}{5} ; a_3 = \frac{3}{10} \quad \text{Vermutung: die Folge ist streng monoton fallend.}$$

Überprüfung:

$$a_n \stackrel{?}{>} a_{n+1} \Rightarrow \frac{n}{n^2+1} \stackrel{?}{>} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \Rightarrow \frac{n}{n^2+1} \stackrel{?}{>} \frac{n+1}{n^2+2n+2} \Rightarrow$$

$$n^3 + 2n^2 + 2n \stackrel{?}{>} n^3 + n + n^2 + 1 \Rightarrow 2n^2 + 2n \stackrel{?}{>} n^2 + n + 1 \Rightarrow n^2 + n \stackrel{?}{>} 1$$

Da  $n$  größer oder gleich 1 ist, steht links auf alle Fälle eine Zahl größer als 1. Damit ist die Ungleichung für alle  $n$  erfüllt, die Folge ist also streng monoton fallend.

---

4b)

$$a_n = n^2 - 12n$$

$$a_1 = 1 - 12 = -11 ; a_2 = 4 - 24 = -20 ; a_3 = 9 - 36 = -27$$

Die Folge scheint streng monoton fallend zu sein.

Überprüfung:

$$a_n \stackrel{?}{>} a_{n+1} \Rightarrow n^2 - 12n \stackrel{?}{>} (n+1)^2 - 12(n+1) \Rightarrow n^2 - 12n \stackrel{?}{>} n^2 + 2n + 1 - 12n - 12 \Rightarrow$$

$$n^2 - 12n \stackrel{?}{>} n^2 - 10n - 11 \Rightarrow -12n \stackrel{?}{>} -10n - 11 \Rightarrow 11 \stackrel{?}{>} 2n$$

Diese Ungleichung gilt nicht für alle  $n$ , sondern nur für  $n$ -Wert von 1 bis 5.

Ab  $n=6$  gilt  $11 < 2n$ , d.h. ab  $n=6$  ist die Folge streng monoton steigend.