

Übungsblatt zu Funktionsscharen

Gegeben ist eine Funktionsschar durch ihre Gleichung $f_t(x) = x^3 - 3t^2x$ mit $t > 0$.

1 Kurvendiskussion (Kurzform)

Ableitungen: $f_t'(x) = 3x^2 - 3t^2$ $f_t''(x) = 6x$ $f_t'''(x) = 6$

Nullstellen: $f_t(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3t^2x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - \sqrt{3}t) \cdot (x + \sqrt{3}t) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm \sqrt{3}t$

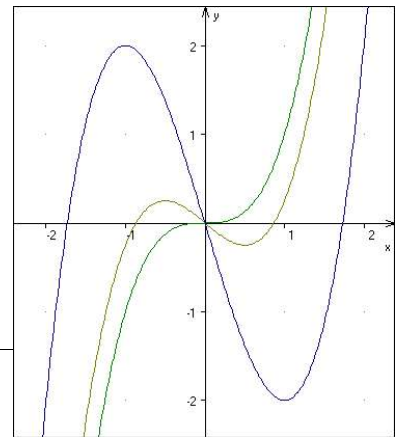
waagrechte Tangenten: $f_t'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3t^2 = 0 \Rightarrow x = \pm t$

$$f_t''(\pm t) = \pm 6t \begin{cases} > 0 \text{ für } +t, \text{ also Minimum} \\ < 0 \text{ für } -t, \text{ also Maximum} \end{cases}$$

$$f_t(\pm t) = \pm t^3 \mp 3t^3 = \mp 2t^3$$

Wendepunkte: $f_t''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$$f_t'''(0) = 6 > 0, \text{ also Wendepunkt } \rightarrow$$



2 Für welches t geht die Kurve durch (2/5)?

$$f_t(2) = 5 \Rightarrow 2^3 - 3t^2 \cdot 2 = 5 \Rightarrow 8 - 6t^2 = 5 \Rightarrow 3 = 6t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = t^2 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3 Für welches t ist die 2. Winkelhalbierende die Tangente im Ursprung?

Gleichung der 2. Winkelhalbierenden: $w_2(x) = -x$ mit $w_2'(x) = -1$

Die Tangente im Ursprung hat die Steigung $f'(0)$ und den y-Achsenabschnitt 0:

$$f'(0) = 0 - 3t^2 = -3t^2$$

Also gilt für die Gleichung der Tangente bei $x=0$: $T_0(x) = -3t^2 \cdot x$ mit $T_0'(x) = -3t^2$.

Nun muss gelten: $w_2'(0) = T_0'(0) \Rightarrow -1 = -3t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Die Funktion mit der Gleichung $f_{\sqrt{\frac{1}{3}}} = x^3 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x = x^3 - x$ besitzt also die 2. Winkelhalbierende als Tangente im Punkt (0/0).

4 Für welches t liegen die Extrempunkte auf der 2. Winkelhalbierenden?

Für die Extrempunkte gilt: $f_t'(x)=0 \Rightarrow 3 \cdot x^2 - 3 \cdot t^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm t$

Dazu gehören die Funktionswerte $f_t(x) = \pm t^3 - 3 \cdot t^2 \cdot (\pm t) = \pm t^3 \mp 3 \cdot t^3 = \mp 2 \cdot t^3$

Für die 2. Winkelhalbierende $w_2(x) = -x$ gilt, dass der Funktionswert gleich ist dem negativen x -Wert. Also muss gelten: $\mp 2 \cdot t^3 = -(\pm t) = \mp t \Rightarrow 2 \cdot t^3 = t \Rightarrow 2 \cdot t^3 - t = 0 \Rightarrow t \cdot (2 \cdot t^2 - 1) = 0$

Es ergeben sich die Lösungen $t_1 = 0; t_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (keine 3. Lösung wegen $t > 0$)

Da für $t=0$ der Funktionsgraph keine Extrempunkte besitzt - nur einen Sattelpunkt - gilt nur die Lösung t_2 .

5 Für welches t ist die Tangente im Schnittpunkt mit der positiven x -Achse parallel zur 1. Winkelhalbierenden?

Die erste Winkelhalbierende $w_1(x) = x$ hat überall die Steigung 1.

Die Nullstelle im positiven Bereich liegt bei $x_N = \sqrt{3} \cdot t$ (siehe oben bei 1).

Die Steigung an dieser Stelle beträgt $f_t'(\sqrt{3} \cdot t) = 3 \cdot 3 \cdot t^2 - 3 \cdot t^2 = 9 \cdot t^2 - 3 \cdot t^2 = 6 \cdot t^2$

Diese Steigung soll den Wert der Steigung der 1. Winkelhalbierenden (also 1) haben.

Also gilt: $6 \cdot t^2 = 1 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{6}}$ Nur eine Lösung wegen $t > 0$.

Die Gleichung der entsprechenden Funktion ist also $f_{\sqrt{\frac{1}{6}}}(x) = x^3 - 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot x = x^3 - \frac{1}{2} \cdot x$.

6 Auf welcher Kurve liegen alle Extrempunkte?

Unter 4 wurde gezeigt, dass für die Extrempunkte gilt: $x_E = \pm t$. Daraus folgt: $t = \pm x_E$.

Für die Funktionswerte der Extrempunkte gilt:

$$f(x_E) = x_E^3 - 3 \cdot t^2 \cdot x_E = x_E^3 - 3 \cdot x_E^2 \cdot x_E = x_E^3 - 3 \cdot x_E^3 = -2 \cdot x_E^3.$$

Also liegen alle Extrempunkte auf der Kurve mit der Funktionsgleichung $f(x_E) = -2 \cdot x_E^3$

7 Zeigen Sie, dass alle Kurven der Schar symmetrisch zum Punkt (0/0) liegen.

Zu zeigen ist: $f(x) = -f(-x)$

$$-f(-x) = -((-x)^3 - 3 \cdot t^2 \cdot (-x)) = -(-x^3 + 3 \cdot t^2 \cdot x) = x^3 - 3 \cdot t^2 \cdot x = f(x)$$
