

Beispiel für eine Kurvendiskussion

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 3$$

$$f''(x) = 6x + 10$$

$$f'''(x) = 6$$

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Symmetrien: Da gerade und ungerade Hochzahlen auftreten, liegt keine Achsensymmetrie zur y-Achse und keine Punktsymmetrie zu (0/0) vor.

Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$: Da x^3 das Verhalten im Unendlichen bestimmt, gilt:

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty ; x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -9$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = 0$

Da die Lösungsformel für Gleichungen 3. Grades nicht bekannt ist, muss eine Lösung z. B. durch Raten gefunden werden: $x=1$ erfüllt die Gleichung. Also kann geschrieben werden:

$x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x-1) \cdot (\dots)$ denn der Term links und rechts des Gleichheitszeichens wird zu 0 für $x=1$. (Für die Mathe-Fachleute: Die Zerlegung eines Terms in Faktoren ist eindeutig)

Die unbekannte Klammer kann durch Polynomdivision gefunden werden:

$$(x^3 + 5x^2 + 3x - 9) : (x - 1) = x^2 + 6x + 9$$

$$x^3 - x^2$$

$$6x^2 + 3x - 9$$

$$6x^2 - 6x$$

$$9x - 9$$

$$9x - 9$$

$$0$$

Zu lösen ist nun noch die Gleichung $x^2 + 6x + 9 = 0$

Mit der p-q-Formel gilt: $x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3$

Diese Nullstelle ist also eine doppelte Nullstelle, d. h. die x-Achse wird bei -3 vom Graph berührt, es liegt also dort eine waagrechte Tangente vor.

Also: Nullstellen bei $x_1 = 0$; $x_{2,3} = -3$

waagrechte Tangenten:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 10x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = -\frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}} = -\frac{5}{3} \pm \frac{4}{3}$$

$$x_1 = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} ; x_2 = -\frac{5}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{9}{3} = -3$$

Überprüfung auf Art der waagrechten Tangente:

$$f''\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{6}{3} + 10 > 0, \text{ also Tiefpunkt bei } x = -\frac{1}{3}. f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{256}{27} \approx -9,5$$

$$f''(-3) = -18 + 10 < 0, \text{ also Hochpunkt bei } x = -3. f(-3) = 0$$

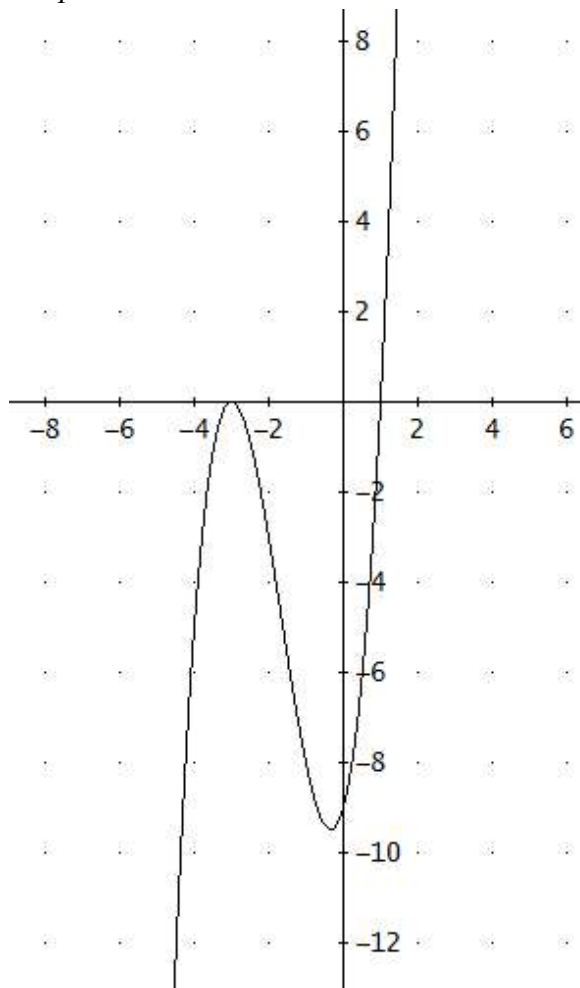
Wendepunkte: $f''(x)=0 \Rightarrow 6x+10=0 \Rightarrow x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$

Überprüfung auf Art des Wendepunktes:

$f'''(-\frac{5}{3})=6>0$, also Wendepunkt mit Krümmung von rechts nach links.

$f(-\frac{5}{3})=-\frac{128}{27} \approx -4,7$

Graph:



Vermutung: Der Graph ist punktsymmetrisch zum

Wendepunkt $W(-\frac{5}{3} | -\frac{128}{27})$

Es müsste also gelten $f(x) = -f(-x+2u) + 2v$
mit $u = -\frac{5}{3}$ und $v = -\frac{128}{27}$.

Derive hilft, diese Vermutung zu bestätigen:

#1: gegebene Funktionsgleichung $f(x)$

#2: $f(-x+2u)$ allgemein

#3: $-f(-x+2u) + 2v$ allgemein

#4: Werte für u und v eingesetzt ergeben wieder die ursprüngliche Funktionsgleichung $f(x)$

#1: $f(x) := x^3 + 5x^2 + 3x - 9$

#2: $f(2u - x) := -x^3 + x^2 \cdot (6u + 5) - x \cdot (12u^2 + 20u + 3) + 8u^3 + 20u^2 + 6u - 9$

#3: $-(-x^3 + x^2 \cdot (6u + 5) - x \cdot (12u^2 + 20u + 3) + 8u^3 + 20u^2 + 6u - 9) + 2v$

#4: $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$