Beispiel für eine Kurvendiskussion

$f(x)=x^3+5x^2+3x-9$

Ableitungen:
$f'(x)=3x^2+10x+3$
$f''(x)=6x+10$
$f'''(x)=6$

Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$

Symmetrien: Da gerade und ungerade Hochzahlen auftreten, liegt keine Achsensymmetrie zur y-Achse und keine Punktsymmetrie zu (0/0) vor.

Verhalten für $x\to\pm\infty$: Da x^3 das Verhalten im Unendlichen bestimmt, gilt:
$x\to+\infty \Rightarrow f(x)\to+\infty \;;\; x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$

y-Achsenabschnitt: $f(0)=-9$

Nullstellen: $f(x)=0 \Rightarrow x^3+5x^2+3x-9=0$
Da die Lösungsformel für Gleichungen 3. Grades nicht bekannt ist, muss eine Lösung z. B. durch Raten gefunden werden: x=1 erfüllt die Gleichung. Also kann geschrieben werden:
$x^3+5x^2+3x-9=(x-1)\cdot(...)$ denn der Term links und rechts des Gleichheitszeichens wird zu 0 für x=1. (Für die Mathe-Fachleute: Die Zerlegung eines Terms in Faktoren ist eindeutig)
Die unbekannte Klammer kann durch Polynomdivision gefunden werden:

$(x^3+5x^2+3x-9):(x-1)=x^2+6x+9$
x^3-x^2

$6x^2+3x-9$
$6x^2-6x$

$9x-9$
$9x-9$

0

Zu lösen ist nun noch die Gleichung $x^2+6x+9=0$
Mit der p-q-Formel gilt: $x_{2,3}=-3\pm\sqrt{9-9}=-3$

Diese Nullstelle ist also eine doppelte Nullstelle,
d. h. die x-Achse wird bei -3 vom Graph berührt,
es liegt also dort eine waagrechte Tangente vor.

Also: Nullstellen bei $x_1=0 \;;\; x_{2,3}=-3$

waagrechte Tangenten:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+10x+3=0 \Rightarrow x^2+\frac{10}{3}\cdot x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=-\frac{5}{3}\pm\sqrt{\frac{25}{9}-1}=-\frac{5}{3}\pm\sqrt{\frac{16}{9}}=-\frac{5}{3}\pm\frac{4}{3}$$

$$x_1=-\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=-\frac{1}{3} \;;\; x_2=-\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{9}{3}=-3$$

Überprüfung auf Art der waagrechten Tangente:

$f''\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{6}{3}+10>0$, also Tiefpunkt bei $x=-\frac{1}{3}$. $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{256}{27}\approx-9{,}5$

$f''(-3)=-18+10<0$, also Hochpunkt bei $x=-3$. $f(-3)=0$

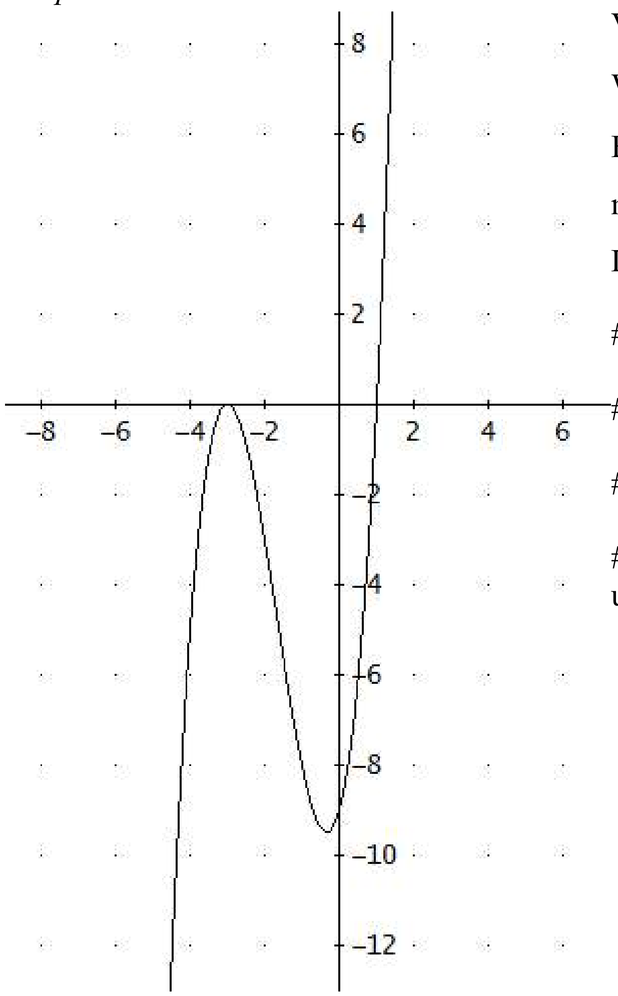
Wendepunkte: $f''(x)=0 \;\Rightarrow\; 6x+10=0 \;\Rightarrow\; x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$

Überprüfung auf Art des Wendepunktes:

$f'''\left(-\frac{5}{3}\right)=6>0$, also Wendepunkt mit Krümmung von rechts nach links.

$f\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{128}{27}\approx-4{,}7$

Graph:



Vermutung: Der Graph ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt $W\left(-\frac{5}{3}/-\frac{128}{27}\right)$

Es müsste also gelten $f(x)=-f(-x+2u)+2v$ mit $u=-\frac{5}{3}$ und $v=-\frac{128}{27}$.

Derive hilft, diese Vermutung zu bestätigen:

#1: gegebene Funktionsgleichung $f(x)$

#2: $f(-x+2u)$ allgemein

#3: $-f(-x+2u)+2v$ allgemein

#4: Werte für u und v eingesetzt ergeben wieder die ursprüngliche Funktionsgleichung $f(x)$

#1: $f(x) := x^3 + 5\cdot x^2 + 3\cdot x - 9$

#2: $f(2\cdot u - x) := -x^3 + x^2\cdot(6\cdot u + 5) - x\cdot(12\cdot u^2 + 20\cdot u + 3) + 8\cdot u^3 + 20\cdot u^2 + 6\cdot u - 9$

#3: $-(-x^3 + x^2\cdot(6\cdot u + 5) - x\cdot(12\cdot u^2 + 20\cdot u + 3) + 8\cdot u^3 + 20\cdot u^2 + 6\cdot u - 9) + 2\cdot v$

#4: $x^3 + 5\cdot x^2 + 3\cdot x - 9$