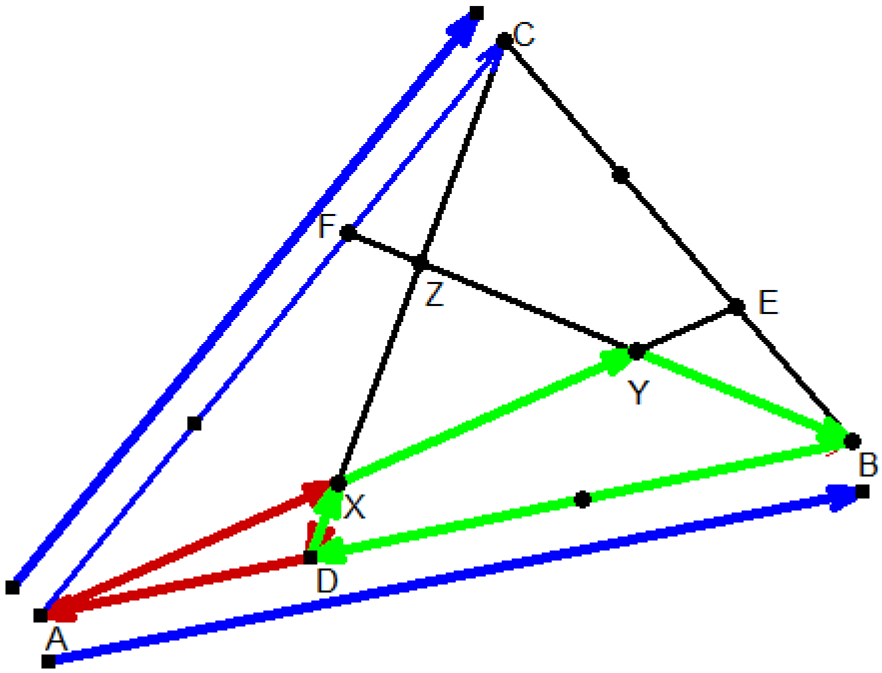
„Teilverhältnisse am Dreieck“

oder

„Um das Wievielfache ist das Dreieck ABC größer als das Dreieck XYZ?“



D teilt die Seite AB im Verhältnis 1:2,
E teilt die Seite BC im Verhältnis 1:2,
F teilt die Seite CA im Verhältnis 1:2.
Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ definieren das Dreieck.

Lösung:

Zunächst wird berechnet, in welchem Verhältnis die Punkte X, Y und Z die durch das Dreieck laufenden Strecken teilen. Dazu wird die Methode des geschlossenen Streckenzugs genutzt:

$$\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{AX}=r\cdot\overrightarrow{AE}=r\cdot\left(\vec{a}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)\right)=r\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\vec{a}+\frac{1}{3}\cdot\vec{b}\right)=\frac{2}{3}\cdot r\cdot\vec{a}+\frac{1}{3}\cdot r\cdot\vec{b}$$

$$\overrightarrow{XD}=s\cdot\overrightarrow{CD}=s\cdot\left(-\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot\vec{a}\right)=-s\cdot\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot s\cdot\vec{a}$$

$$\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{3}\cdot\vec{a}$$

$$\frac{2}{3}\cdot r\cdot\vec{a}+\frac{1}{3}\cdot r\cdot\vec{b}-s\cdot\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot s\cdot\vec{a}-\frac{1}{3}\cdot\vec{a}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot r+\frac{1}{3}\cdot s-\frac{1}{3}\right)+\vec{b}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot r-s\right)=\vec{0} \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}\cdot r+\frac{1}{3}\cdot s-\frac{1}{3}=0 \;\wedge\; \frac{1}{3}\cdot r-s=0 \;\Rightarrow$$

$$s=\frac{1}{3}\cdot r \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}\cdot r+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot r-\frac{1}{3}=0 \;\Rightarrow\; \frac{6}{9}\cdot r+\frac{1}{9}\cdot r=\frac{3}{9} \;\Rightarrow\; \frac{7}{9}\cdot r=\frac{3}{9} \;\Rightarrow\; r=\frac{3}{7} \;\Rightarrow\; s=\frac{1}{7}$$

Aus Symmetriegründen haben alle von den Eckpunkten ausgehenden Teilstrecken $\frac{3}{7}$ der Länge der durch das Dreieck verlaufenden Strecke, die auf die Seiten des Dreiecks auftreffenden Teilstücke $\frac{1}{7}$ der Länge. Damit bleiben für das mittlere Teilstück $\frac{3}{7}$ der Länge übrig.
Alle Transversalen werden also durch die Punkte X, Y und Z wie 3:3:1 geteilt.

Dasselbe Ergebnis ergibt sich natürlich, wenn man einen anderen geeigneten geschlossenen Streckenzug betrachtet, im Folgenden z.B. XYBDX:

$$\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DX}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{XY}=r\cdot\overrightarrow{AE}=r\cdot\left(\vec{a}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)\right)=r\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\vec{a}+\frac{1}{3}\cdot\vec{b}\right)=\frac{2}{3}\cdot r\cdot\vec{a}+\frac{1}{3}\cdot r\cdot\vec{b}$$

$$\overrightarrow{YB}=s\cdot\overrightarrow{FB}=s\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot\vec{b}+\vec{a}\right)=-\frac{2}{3}\cdot s\cdot\vec{b}+s\cdot\vec{a}$$

$$\overrightarrow{BD}=-\frac{2}{3}\cdot\vec{a}$$

$$\overrightarrow{DX}=t\cdot\overrightarrow{DC}=t\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot\vec{a}+\vec{b}\right)=-\frac{1}{3}\cdot t\cdot\vec{a}+t\cdot\vec{b}$$

$$\frac{2}{3}\cdot r\cdot\vec{a}+\frac{1}{3}\cdot r\cdot\vec{b}-\frac{2}{3}\cdot s\cdot\vec{b}+s\cdot\vec{a}-\frac{2}{3}\cdot\vec{a}-\frac{1}{3}\cdot t\cdot\vec{a}+t\cdot\vec{b}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot r+s-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot t\right)+\vec{b}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot r-\frac{2}{3}\cdot s+t\right)=\vec{0} \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}\cdot r+s-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot t=0 \;\wedge\; \frac{1}{3}\cdot r-\frac{2}{3}\cdot s+t=0$$

Aus Symmetriegründen muss gelten: $r + s + t = 1$, also $t = 1 - r - s$. Es folgt:

$$\frac{2}{3}\cdot r+s-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot r+\frac{1}{3}\cdot s=r+\frac{4}{3}\cdot s-1=0 \;\Rightarrow\; r=1-\frac{4}{3}\cdot s \quad \text{und}$$

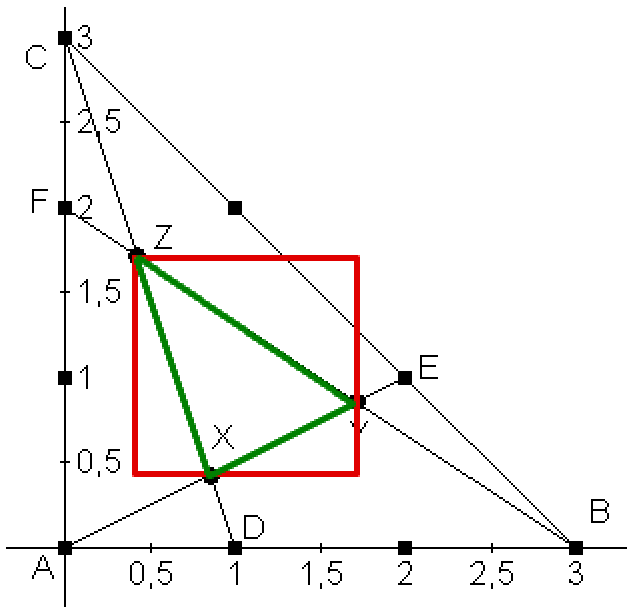
$$\frac{1}{3}\cdot r-\frac{2}{3}\cdot s+1-r-s=-\frac{2}{3}\cdot r-\frac{5}{3}\cdot s+1=0 \;\Rightarrow\; -\frac{2}{3}+\frac{8}{9}\cdot s-\frac{5}{3}\cdot s+1=0 \;\Rightarrow\; -\frac{7}{9}\cdot s+\frac{1}{3}=0 \;\Rightarrow\; s=\frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow\; r=1-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{7}=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7} \quad \text{und damit} \quad t=1-r-s=1-\frac{3}{7}-\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$$

Auch hier ergibt sich, dass die Transversalen durch die Punkte X, Y und Z wie 3:3:1 geteilt werden.

Nun zur Flächenberechnung:
Da es nur auf das Verhältnis der Flächen zueinander ankommt und nicht auf konkrete Flächeninhalte und da die Verhältnisse der Flächen zueinander konstant bleiben, ganz gleich, wie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gewählt werden, darf man sich ein beliebiges Dreieck für die Berechnung aussuchen.
Hier wird das a) mit einem gleichschenklig-rechtwinkligen und b) mit einem gleichseitigen Dreieck verwirklicht.

gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck:



Der rechte Winkel ist bei A, daher ist AC die Höhe im Dreieck mit der Grundseite AB.
Für das große Dreieck ergibt sich der Flächeninhalt
$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=\frac{9}{2}$.

Zur Berechnung des kleinen Dreiecks werden die Gleichungen der Geraden
g durch A und E,
h durch B und F und
i durch C und D berechnet.

$$g:\ \ y=\frac{1}{2}\cdot x$$

$$h:\ \ y=-\frac{2}{3}\cdot x+2$$

$$i:\ \ y=-3\cdot x+3$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte X, Y und Z ergeben sich durch Gleichsetzen der Geradengleichungen.

g und h geben Y: $\frac{1}{2}\cdot x_Y=-\frac{2}{3}\cdot x_Y+2 \;\Rightarrow\; \frac{7}{6}\cdot x_Y=2 \;\Rightarrow\; x_Y=\frac{12}{7} \;\Rightarrow\; y_Y=\frac{6}{7}$

h und i geben Z: $-\frac{2}{3}\cdot x_Z+2=-3\cdot x_Z+3 \;\Rightarrow\; \frac{7}{3}\cdot x_Z=1 \;\Rightarrow\; x_Z=\frac{3}{7} \;\Rightarrow\; y_Z=\frac{12}{7}$

i und g geben X: $-3\cdot x_X+3=\frac{1}{2}\cdot x_X \;\Rightarrow\; 3=\frac{7}{2}\cdot x_X \;\Rightarrow\; x_X=\frac{6}{7} \;\Rightarrow\; y_X=\frac{3}{7}$

Mit den ermittelten Werten lassen sich die Flächen des roten Quadrats und der im Quadrat durch die grünen Linien begrenzten Dreiecke berechnen:

rotes Quadrat: $(x_Y-x_Z)\cdot(y_Z-y_X)=\left(\frac{12}{7}-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(\frac{12}{7}-\frac{3}{7}\right)=\frac{9}{7}\cdot\frac{9}{7}=\frac{81}{49}$

Dreieck links unten: $\frac{1}{2}\cdot(x_X-x_Z)\cdot(y_Z-y_X)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{6}{7}-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(\frac{12}{7}-\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{9}{7}=\frac{27}{98}$

Dreieck rechts unten: $\frac{1}{2}\cdot(x_Y-x_X)\cdot(y_Y-y_X)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{12}{7}-\frac{6}{7}\right)\cdot\left(\frac{6}{7}-\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{18}{98}$

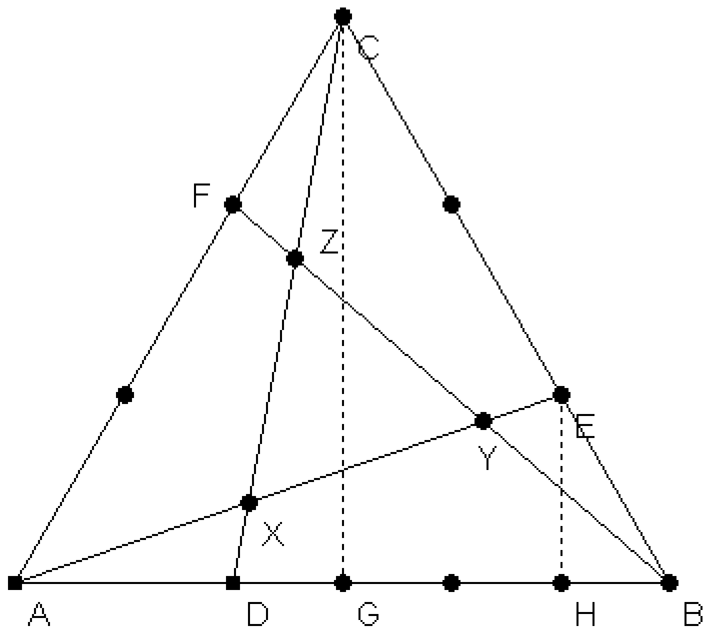
Dreieck rechts oben: $\frac{1}{2}\cdot(x_Y-x_Z)\cdot(y_Z-y_Y)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{12}{7}-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(\frac{12}{7}-\frac{6}{7}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{6}{7}=\frac{54}{98}$

Fläche des grünen Dreiecks = Fläche des Quadrats – Fläche der oben berechneten Dreieck:

$$A=\frac{81}{49}-\frac{27}{98}-\frac{18}{98}-\frac{54}{98}=\frac{81}{49}-\frac{99}{98}=\frac{162}{98}-\frac{99}{98}=\frac{63}{98}=\frac{9}{14}$$

Das Verhältnis vom großen Dreieck zum kleinen Dreieck ist also $\frac{9}{2}:\frac{9}{14}=7:1$

gleichseitiges Dreieck:



Hat die Seite AB die Länge a, so beträgt die Fläche des großen Dreiecks ABC

$$A_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2$$

Aus Symmetriegründen ist das kleine Dreieck XYZ auch gleichseitig.
Zur Berechnung der Fläche wird zunächst die Länge der Strecke AE berechnet. Der Wert ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras aus den Längen der Strecken EH und AH.
EH hat nach dem Strahlensatz die Länge $\frac{1}{3}\cdot\overline{CG}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot a$.
AH hat nach der nebenstehenden Abbildung die Länge $\frac{5}{6}\cdot\overline{AB}=\frac{5}{6}\cdot a$.

Damit gilt: $\overline{AE}=\sqrt{\overline{EH}^2+\overline{AH}^2}=\sqrt{\frac{3}{36}\cdot a^2+\frac{25}{36}\cdot a^2}=\sqrt{\frac{28}{36}\cdot a^2}=\sqrt{\frac{7}{9}\cdot a^2}=\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot a$

Da die Strecke AE durch X und Y im Verhältnis 3:3:1 geteilt wird, beträgt die Seitenlänge des kleinen Dreiecks XYZ genau $\frac{3}{7}$ der Länge der Seite AE, also $\frac{3}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot a=\frac{a}{\sqrt{7}}$.
Da sich die Flächen ähnlicher Figuren wie die Quadrate entsprechender Seitenlängen in diesen Figuren verhalten, verhält sich die Fläche des großen Dreiecks zu der des kleinen Dreiecks wie

$$a^2:\left(\frac{a}{\sqrt{7}}\right)^2=\frac{a^2\cdot 7}{a^2}=7:1$$

Wer findet weitere geeignete Dreiecke, an denen sich dieses Flächenverhältnis gut ermitteln lässt?