TI-84 im Mathematikunterricht

Stand: 2010-03-25

Neues Betriebssystem (Stand 2010-03-09)

download:

[Betriebssystem](http://education.ti.com/downloads/files/83plus/TI84Plus_OS.8Xu)
http://education.ti.com/downloads/files/83plus/TI84Plus_OS.8Xu

[Anleitung](http://www.ti-unterrichtsmaterialien.net/imgserv.php?id=TI-84PLUS_BS_2.53MP.pdf)
http://www.ti-unterrichtsmaterialien.net/imgserv.php?id=TI-84PLUS_BS_2.53MP.pdf

Graphen einer Funktionsgleichung zeichnen:

`Y=`	Funktionsgleichung eingeben schwarzes Feld unter = bedeutet, dass die Gleichung zum Zeichnen aktiviert ist	
`GRAPH`	Graphen aller aktivierten Gleichungen werden gezeichnet	
`WINDOW`	Festlegen des Zeichenbereichs	
`ZOOM`	`1:ZBox`	mit den Cursortasten werden die obere linke und die untere rechte Ecke eines Bereichs festgelegt, dessen Inhalt gezoomt werden soll
	`2:Zoom In`	Hineinzoomen in das Bild; Cursor gibt Mitte an
	`3:Zoom Out`	Hinauszoomen aus dem Bild; Cursor gibt Mitte an
	`6:ZStandard`	stellt das Standard-Fenster wieder her: (0/0) im Zentrum

Nullstellen eines Graphen finden:

`2nd CALC`	`2:zero`	findet die Nullstelle eines Graphen; angegeben werden müssen die linke und die rechte Grenze sowie ein Näherungswert.

Extrema eines Graphen finden

`2nd CALC`	`3:minimum`	findet das Minimum eines Graphen in einem Bereich; angegeben werden müssen die linke und die rechte Grenze des Bereichs sowie ein Näherungswert.
`2nd CALC`	`4:maximum`	findet das Maximum eines Graphen in einem Bereich; angegeben werden müssen die linke und die rechte Grenze des Bereichs sowie ein Näherungswert.

Wendepunkte eines Graphen finden

Wendepunkte einer Funktion sind an den Stellen vorhanden, an denen die 1. Ableitung der Funktion ein Extremum besitzt oder an denen die 2. Ableitung der Funktion eine Nullstelle besitzt. Man lässt im Menü `Y=` die Ableitung(en) berechnen und untersucht diese dann auf Extrema bzw. Nullstellen.
Beispiel für die Gleichungen im Menü `Y=` :

```
\Y1=X^3+2*X^2-4*X+2
\Y2=nDeriv(Y1(X),X,X)
\Y3=nDeriv(Y2(X),X,X)
```

`nDeriv`	findet man im Menü	`MATH / MATH / 8:nDeriv(`
`Y1(`	findet man unter	`VARS / Y-VARS / 1:Function... / 1:Y1`

Lösen eines Gleichungssystems, gezeigt an einem Beispiel

```
 5x + 3y - 4z = 8
 7x - 2y + 9z = 3
-2x +  y - 7z = 6
```

Gleichungssystem als Matrix schreiben: $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 & 8 \\ 7 & -2 & 9 & 3 \\ -2 & 1 & -7 & 6 \end{pmatrix}$

Matrix in den Taschenrechner eingeben:

`2nd MATRIX    EDIT      1: [A]` (oder andere Matrix auswählen)

Im folgenden Bildschirm hinter `MATRIX[A]` erst die Anzahl der Reihen, dann die der Spalten eingeben (jeweils mit `ENTER` bestätigen), dann die einzelnen Matrixelemente eingeben.
Der Bildschirm sieht nach der Eingabe etwa so aus:

```
MATRIX[A]  3  x 4

[    5    3    -4   8    ]
[    7    -2   9    3    ]
[    -2   1    -7   6    ]

3,4=6
```

In der unteren Zeile wird hier der Wert in der 3. Zeile und der 4. Spalte angezeigt.

Nun mit `2nd QUIT` in den Hauptbildschirm wechseln.

`2nd MATRIX`	`MATH`	`B:rref(`	auswählen
`2nd MATRIX`	`NAMES`	`1:[A]`	auswählen
`)`	`ENTER`		ergänzen

liefert die Ausführung des Befehls `rref([A])`

Angezeigt wird nun die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1{,}933962264 \\ 0 & 1 & 0 & -3{,}009433962 \\ 0 & 0 & 1 & -1{,}839622642 \end{pmatrix}$

Oben auf der Seite wurde ein Gleichungssystem in eine Matrix umgeformt.
Auf umgekehrtem Weg entsteht nun aus der Matrix das vereinfachte Gleichungssystem

```
1x + 0y + 0z = 1,933962264
0x + 1y + 0z = -3,009433962
0x + 0y + 1z = -1,839622642
```

oder vereinfacht und näherungsweise `x=1,9 ; y=-3,0 ; z=-1,8`

Gleichung lösen

Mit dem Befehl `Solver...` lassen sich beliebige Gleichungen näherungsweise lösen:

`MATH     0:Solver...`

wählen.

Es erscheint entweder ein Bildschirm mit einem ähnlichen Inhalt wie

```
EQUATION SOLVER
eqn:0=x²-5*x-2
```

oder

```
x²-5*x-2=0
 X=2.00000000
 bound={-1E99,1E99}
```

Mit Pfeil-oben oder Pfeil-unten kann zwischen den Bildschirmen gewechselt werden.

Im linken Bildschirm kann hinter 0= ein beliebiger Term eingegeben werden, dessen Nullstelle berechnet werden soll. Man kann auch über das Menü

`VARS     Y-VARS   1:Function...`

eine Funktion aus dem `Y=` - Menü auswählen, z.B. `Y1`.

Im rechten Bildschirm werden unter der Gleichung alle Variablen angegeben.
Diese müssen mit einem Wert vorbelegt werden, der günstig nahe dem vermuteten Wert der Nullstelle gewählt werden sollte (die Berechnung wird dann schneller ausgeführt).

Dann beginnt mit der Tastenfolge

`ALPHA     SOLVE` (Enter-Taste)

die iterative Berechnung der Nullstelle.
Sind mehrere Nullstellen vorhanden, müssen zur Berechnung der weiteren Nullstellen andere Variablenwerte vorgewählt werden.
Damit die Berechnung schneller abläuft, kann mit den Werten bei `bound={...}` der Bereich eingeschränkt werden, in dem nach einer Lösung gesucht wird.

Integrale berechnen

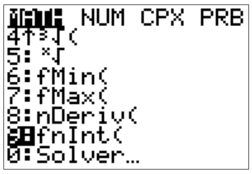
Der TI-84 bietet zwei Möglichkeiten zur Berechnung von Integralen:

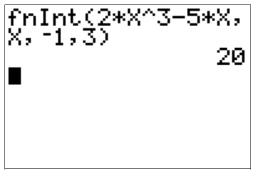
1. mit dem Math-Menü

`MATH      9:fnInt(`

auf dem Rechen-Bildschirm wird dann hinter `fnInt(` zuerst die zu integrierende Funktionsgleichung geschrieben, dann Komma, dann die Variable (meistens wohl x), dann Komma, dann untere Grenze des Integrals, dann Komma, dann obere Grenze des Integrals und dann)

Beispiele:

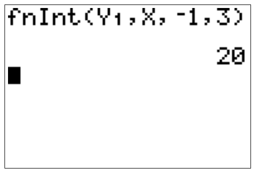




`fnInt(2*x^3-5*x,x,-1,3)`

als Ergebnis wird dann 20 ausgegeben.

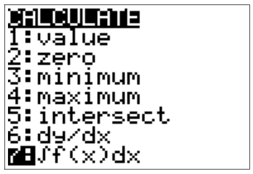
Wird die Funktionsgleichung unter `y=` z. B. als `Y1` eingegeben, so kann man auch schreiben:



`fnInt(Y1,x,-1,3)`

`Y1` wird über `VARS > Y-VARS > 1:Function... > 1:Y1` erreicht.

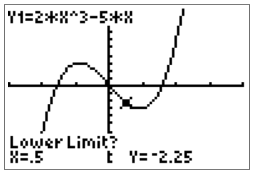
2. mit dem Calc-Menü



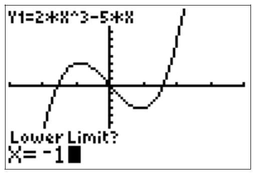
Zuerst wird über `Y=` die Funktionsgleichung eingegeben.

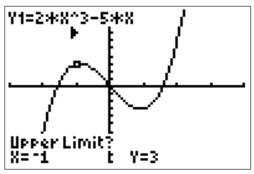
`2nd CALC      7:∫f(x)dx`

bringt uns zu diesem Bildschirm:

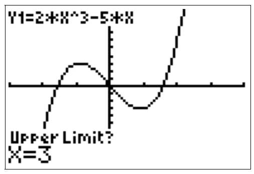


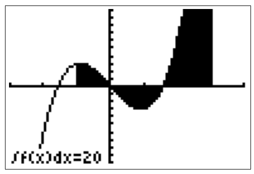
Die untere Grenze kann man entweder durch Anfahren der Stelle mit dem Cursor oder durch Eingeben einer Zahl festlegen:





Ebenso legt man die obere Grenze fest und erhält dann das Ergebnis:

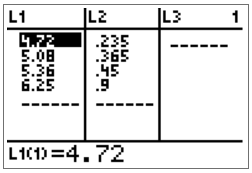




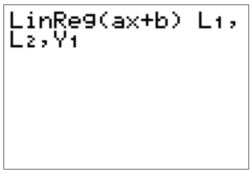
Achtung: Es wird mit orientierten Flächeninhalten gerechnet, d. h. die Flächenteile unter der x-Achse gehen als negative Zahlen in die Rechnung ein! 20 ist also das Ergebnis für das Integral von -1 bis 3, der wahre Flächeninhalt ist 26,25.

Lineare Regression

Die Messwerte eines Versuchs werden in den Listen `L1` und `L2` gespeichert. Hier wird das Beispiel einer h-Bestimmung aus dem Physikunterricht der Klassenstufe 13 verwendet:
Mit `STAT > EDIT` gelangt man zur Eingabemaske für die Listen:

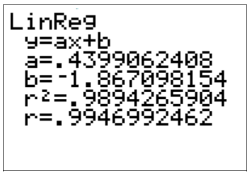


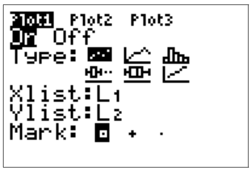
Vom leeren allgemein Arbeitsbildschirm aus ruft man mit
`STAT > CALC > 4:LinReg(ax+b)`
die lineare Regression auf.
Hinter der Anzeige `LinReg(ax+b)` müssen nun noch die betroffenen Listen angegeben werden.



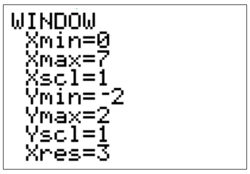
Man erhält die Angaben für `L1` und `L2` mit `2ND 1` und `2ND 2` und
`Y1` mit `VARS > Y-VARS > FUNCTION > Y1`

Mit `ENTER` schließt man diesen Befehl ab und erhält die Ausgabe

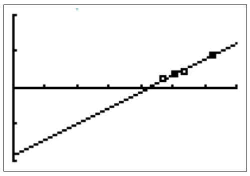




`STAT PLOT`



`WINDOW`



`GRAPH`

Zum Anzeigen des Regressionskoeffizienten: CATALOG > DiagnosticOn

---

Bernoulli-Verteilung

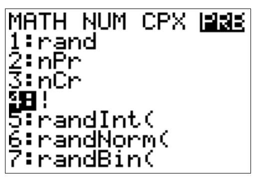
Mit der Formel $p(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$ berechnet man die Wahrscheinlichkeit, dass man bei n aufeinander folgenden Ziehungen k mal Erfolg hat. Das gilt bei Zufallsversuchen, bei denen es nur 2 mögliche Ausgänge des Versuchs gibt (z. B. „Erfolg“ und „nicht Erfolg“).
Die Wahrscheinlichkeit für „Erfolg“ beträgt p und für „nicht Erfolg“ q. Dabei gilt q = 1 - p.

Mit dem TI-84 kann man die Wahrscheinlichkeiten durch Eingabe des gesamten Terms oder durch eine speziell implementierte Funktion eingeben.

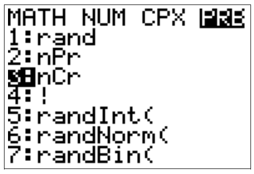
Statt des Binoms (1. Faktor) kann man dabei wegen $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ auch den Bruch unter Verwendung der Fakultätsfunktion benutzen.

Definition der Fakultät: n! = 1 · 2 · 3 · ... · n mit 0! = 1 und 1! = 1

Auf dem Rechner: Nach Eingabe von n Taste `MATH` drücken und dann unter `PRB` das Ausrufungszeichen `4:!` wählen.



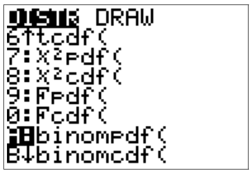
$\binom{n}{k}$ kann aber auch direkt eingegeben werden:

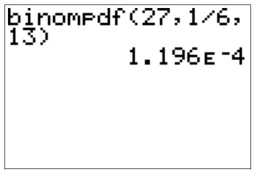


Nach Eingabe von n Taste `MATH` drücken und dann unter `PRB 3:nCr` wählen. Danach k eingeben.

Man kann aber auch den gesamten Term so erzeugen:

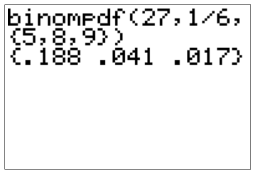
`2nd DISTR` > `A:binompdf(` wählen



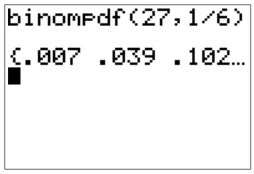


dann der Reihe nach n, p und k eingeben, jeweils durch Komma getrennt und mit) abschließen.
Beispiel für n = 27 , p = 1/6 , k = 13 nebenstehend.

Möchte man die Wahrscheinlichkeiten für mehrere k-Werte berechnen, kann man statt des k-Wertes auch eine Menge, z. B. {5, 8, 9} eingeben.

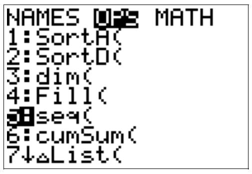


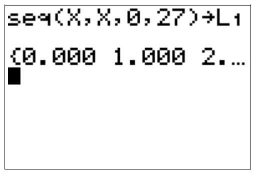
Ist man an den Wahrscheinlichkeiten aller k interessiert, lässt man den k-Wert einfach weg.
Mit den Cursortasten (links, rechts) kann man in dem Ergebnis hin- und herwandern.



Eine graphische Ausgabe erfolgt so:

`2nd LIST` > `OPS` > `5:seq(` wählen

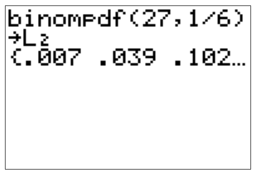




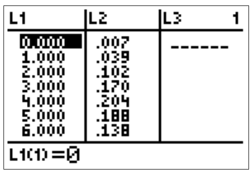
dann `X,X,0,27)` eingeben, wobei statt 0 und 27 der kleinste und der größte k-Wert angegeben wird.

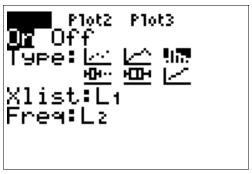
Anschließend `STO > 2nd L1` eingeben, um das Ergebnis in Liste 1 zu speichern.

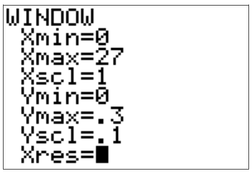
In Liste 2 werden die Wahrscheinlichkeiten gespeichert mit `binompdf(`, dann n und p eingeben, dann `STO > 2nd L2`

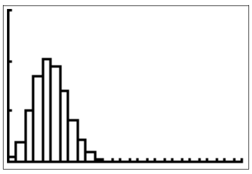


Unter `2nd Stat Plot` den Plot 1 einschalten und die Anzeige auf Säulendiagramm stellen.
Unter `XList L1` und unter `Freq L2` eintragen.
Dann noch unter `WINDOW` die Werte geeignet wählen und unter `GRAPH` erscheint das gewünschte Säulendiagramm.





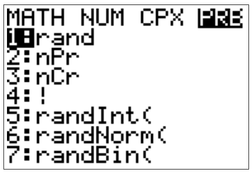


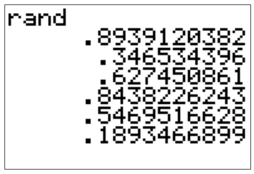


Wenn man mehrere Wahrscheinlichkeiten von k=0 bis k=a berechnen will, kann man auch die Summen-Funktion `binomcdf(n,p,a)` wählen.

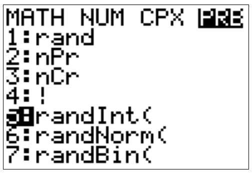
Zufallszahlen

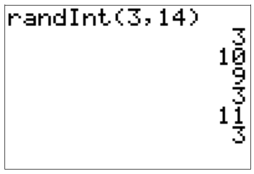
Einzelne Zufallszahlen aus dem Intervall [0,1[erhält man mit dem `rand`-Befehl unter `MATH`.
Zur Wiederholung des Befehls nur die `ENTER`-Taste drücken.



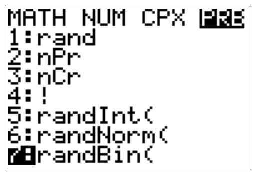


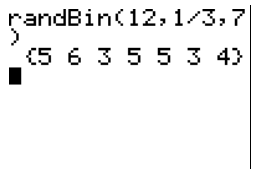
Ganze Zahlen aus dem Intervall [a,b] erhält man mit dem `randInt`-Befehl unter `MATH`.
Zur Wiederholung des Befehls nur die `ENTER`-Taste drücken.





Mit dem `randBin`-Befehl erhält man Informationen über die Ausgänge mehrerer Bernoulli-Versuche.
Mit n als Länge der Bernoulli-Kette (=Anzahl der Schritte im Baumdiagramm), der Wahrscheinlichkeit p für „Erfolg“ und a für die Anzahl der Bernoulli-Versuche wird mit `randBin(n,p,a)` eine Liste von a Zahlen ausgegeben, die angibt, wie oft bei jedem der Versuche „Erfolg“ eingetreten ist.

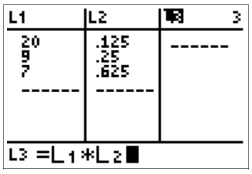


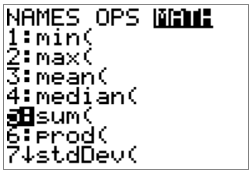


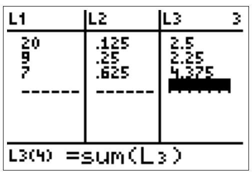
Erwartungswert E(x) oder μ

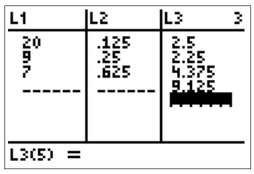
Während bei Bernoulliversuchen der Erwartungswert sehr einfach durch $E(X)=n \cdot p$ errechnet wird, ist die Berechnung bei anderen Versuchen aufwändiger: Die k-Werte der Zufallsvariablen X müssen mit den Wahrscheinlichkeiten $p(X=k)$ multipliziert werden und das Ergebnis dieser Produkte müssen addiert werden. Mit dem TI-84+ lässt sich die Berechnung vereinfachen:

1. In die Liste `L1` werden die k-Werte geschrieben.
2. Die Liste `L2` enthält die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.
3. In der Liste `L3` werden mit der Formel `L3=L1*L2` (in der Kopfspalte bei `L3` eingeben) die Produkte berechnet.
4. In einem beliebigen Feld, z.B. in L3(4) oder in der allgemeinen Ansicht, wird mit `sum(L3)` der Erwartungswert ermittelt. `sum` findet man im `LIST` Menü unter `MATH`.

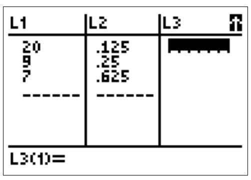
Beispiel: 

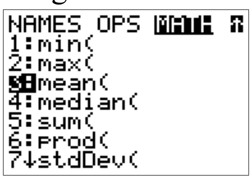


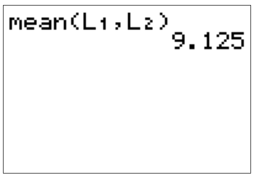




Alternativ kann man den Erwartungswert auch mit der Funktion `mean` unter `LIST` berechnen:

Beispiel: 

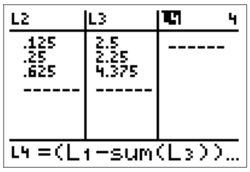


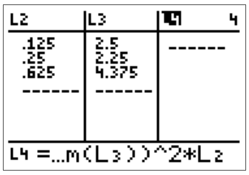


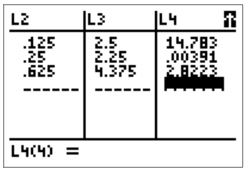
Liste 1 enthält die k-Werte und Liste 2 die Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen k-Werte.

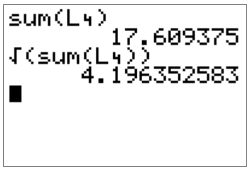
Varianz V und Standardabweichung σ

Da die Varianz als $V(X)=\Sigma((k-\mu)^2 \cdot p(X=k))$ definiert ist, rechnet man zuerst wie oben den Erwartungswert aus und trägt dann in der Kopfzeile von `L4` ein:
`(L1-sum(L3))^2*L2`
Die Summe wird mit `sum(L4)` berechnet und die Standardabweichung `√(sum(L4))`.

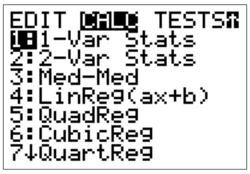


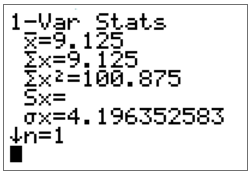






Stehen in `L1` die k-Werte und in `L2` die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten (d.h. die Summe aller Werte in `L2` muss 1 ergeben) so kann man sich auf einen Blick den Erwartungswert und die Standardabweichung ausgeben lassen:
Im `STAT`-Menü unter `CALC` den Punkt `1:1-VAR STATS` wählen:





Der Erwartungswert ist dann unter Σx zu finden, die Standardabweichung unter σx.

Berechnungen bei binomialverteilten Zufallsgrößen mit Hilfe der Normalverteilung

Ist bei einer binomialverteilten Zufallsgröße die Varianz größer als 9, kann nach dem Satz von Moivre und Laplace mit folgender Näherung gerechnet werden:

(1) $P(k_1 \le X \le k_2) \approx \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$ mit $z_1 = \frac{k_1 - n \cdot p - 0{,}5}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$ und $z_2 = \frac{k_2 - n \cdot p + 0{,}5}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$

(2) $P(k \le X) \approx \Phi(z)$ mit $z = \frac{k - n \cdot p + 0{,}5}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$

(3) $P(X \le k) \approx 1 - \Phi(z)$ mit $z = \frac{k - n \cdot p - 0{,}5}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$

(4) $P(X = k) \approx \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$ mit $z_1 = \frac{k - n \cdot p - 0{,}5}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$ und $z_2 = \frac{k - n \cdot p + 0{,}5}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$

Für stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ fällt der Summand 0,5 weg.

Mit dem Taschenrechner berechnet man die Wahrscheinlichkeiten mit dem Befehl `normalcdf`, der unter `2nd + DISTR` zur Verfügung steht.

(1) : `normalcdf(k1-0.5,k2+0.5,μ,σ)` oder `normalcdf(z1,z2,0,1)`

(2) : `normalcdf(-1E99,k+0.5,μ,σ)` oder `normalcdf(-1E99,z,0,1)`

(3) : `1-normalcdf(-1E99,k-0.5,μ,σ)` oder `1-normalcdf(-1E99,z,0,1)`

(4) : `normalcdf(k-0.5,k+0.5,μ,σ)` oder `normalcdf(z1,z2,0,1)`

Statt der „kleinsten“ Zahl -1E99 (eingeben mit `2nd+EE`) kann auch eine andere genügend kleine Zahl verwendet werden, z.B. -1000.

Screenshots für die Fälle (1) bis (4) mit n=700 ; p=0,1 → q=0,9 ; μ=70 ; V=63 (ist >9) ; σ≈7,9

(1) : $P(65 \le X \le 72)$

Binomialverteilung:

```
binomcdf(700,.1,
72)-binomcdf(700
,.1,65)
       .3400140605
```

Normalverteilung:

```
normalcdf(64.5,7
2.5,70,√(63))
       .379432729
```

(2) : $P(65 \le X)$

Binomialverteilung:

```
binomcdf(700,.1,
72)
       .6293122922
```

Normalverteilung:

```
normalcdf(⁻1E99,
72.5,70,√(63))
       .6236078689
```

(3) : $P(X \le 72)$

Binomialverteilung:

```
1-binomcdf(700,.
1,65)
       .7107017684
```

Normalverteilung:

```
normalcdf(⁻1E99,
72.5,70,√(63))
       .6236078689
```

(4) : $P(X = 72)$

Binomialverteilung:

```
binompdf(700,.1,
72)
       .0480432483
```

Normalverteilung:

```
normalcdf(71.5,7
2.5,70,√(63))
       .0486612517
```

Ist bei bekannter Wahrscheinlichkeit der z-Wert von Φ(z) gesucht, benutzt man die Funktion `invNORM(` , die ebenfalls unter `2nd + DISTR` zu finden ist:

```
normalcdf(⁻1E99,
72.5,70,√(63))
       .6236078689
invNorm(.6236078
689)
       .3149702272
```

Zur Erklärung des Wertes 0,31497...:

Mit $k=72{,}5\,;\mu=70\,;\sigma=\sqrt{63}$ gilt $z=\frac{k-\mu}{\sigma}=\frac{72-70}{\sqrt{63}}=\frac{2}{\sqrt{63}}\approx 0{,}314970394$

Gibt man diesen Wert in der normierten Form (μ=0 ; σ=1) ein, so folgt:

```
normalcdf(⁻1E99,
.314970394,0,1)
       .6236078689
```

Beispiel für die Anwendung von `invNORM(` :

Es sind c·σ-Umgebungen gesucht, in denen w% aller Versuchsergebnisse liegen:

$$P(\mu-c\cdot\sigma \le X \le \mu+c\cdot\sigma)=P(-c\cdot\sigma \le X-\mu \le c\cdot\sigma)=P\left(-c \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le c\right)=P(-c \le z \le c)=w\,\%$$

Dann liegen an jedem Rand ((100-w)/2)% der Versuchsergebnisse und es folgt

$$P(z \le c)=\left(w+\frac{100-w}{2}\right)\%=\left(\frac{2w+100-w}{2}\right)\%=\left(\frac{w}{2}+50\right)\%\,.$$

Mit invNORM((w/2+50)/100) ergibt sich also der c-Wert.

Zahlenbeispiel: Für die 90%-Umgebung gilt: w=90 → w/2=45 → (w/2+50)/100=0,95
invNORM(0.95) ergibt 1,64. In der 1,64 σ-Umgebung liegen also 90% aller Ergebnisse.

```
invNorm(.95)
     1.644853626
```