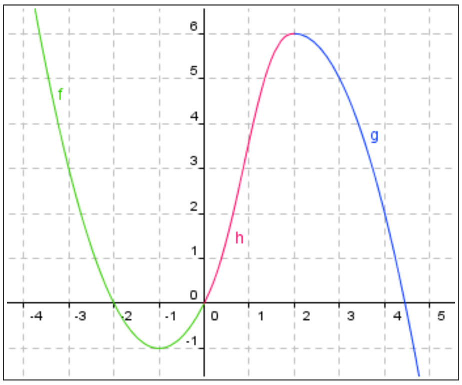
Übungsaufgabe zum Thema „Strecken-Trassierung“



Gegeben sind die beiden Funktionsgleichungen
$f(x)=(x+1)^2-1$ im Intervall $]-\infty,0]$ und
$g(x)=-(x-2)^2+6$ im Intervall $[+2,+\infty[$.

Die Lücke im Intervall $[0,+2]$ soll durch den Graph einer ganzrationalen Funktion h(x) so ausgefüllt werden, dass man beim Durchfahren aller drei Graphen beim Übergang von einem Graph zum anderen keinen Ruck spürt.

Dazu müssen an den Nahtstellen jeweils der Funktionswert und die 1. und 2. Ableitung der benachbarten Funktionen übereinstimmen:

$$h(0)=f(0)\ ;\ h'(0)=f'(0)\ ;\ h''(0)=f''(0)\ ;\ h(2)=g(2)\ ;\ h'(2)=g'(2)\ ;\ h''(2)=g''(2)$$

Da 6 Bedingungen erfüllt sein müssen, hat die Funktion h(x) mindestens den Grad 5:

$$h(x)=a\cdot x^5+b\cdot x^4+c\cdot x^3+d\cdot x^2+e\cdot x+k$$

Mit den 6 Bedingungen kann man 6 Gleichungen aufstellen, sodass die 6 Parameter in der Funktionsgleichung h(x) bestimmt werden können.

Benötigt werden die Funktionsgleichungen und ihre 1. und 2. Ableitung:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x)&=(x+1)^2-1=x^2+2x\\ f'(x)&=2x+2\\ f''(x)&=2\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} g(x)&=-(x-2)^2+6=-x^2+4x+2\\ g'(x)&=-2x+4\\ g''(x)&=-2\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} h(x)&=a\cdot x^5+b\cdot x^4+c\cdot x^3+d\cdot x^2+e\cdot x+k\\ h'(x)&=5a\,x^4+4b\,x^3+3c\,x^2+2d\,x+e\\ h''(x)&=20a\,x^3+12b\,x^2+6c\,x+2d\end{aligned}}$$

Die Bedingungen und die daraus folgenden Gleichungen:

$h(0)=f(0)\ \rightarrow\ k=0$

$h'(0)=f'(0)\ \rightarrow\ e=2$

$h''(0)=f''(0)\ \rightarrow\ 2d=2\ \rightarrow\ d=1$

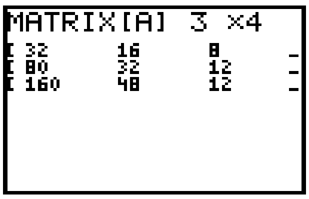
$h(2)=g(2)\ \rightarrow\ 32a+16b+8c+4d+2e+k=6$

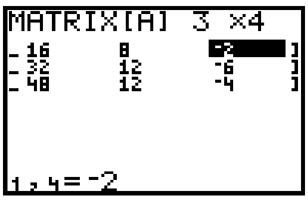
$h'(2)=g'(2)\ \rightarrow\ 80a+32b+12c+4d+e=0$

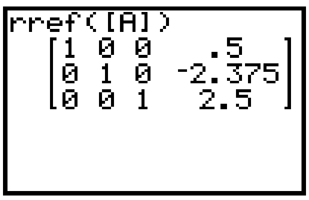
$h''(2)=g''(2)\ \rightarrow\ 160a+48b+12c+2d=-2$

Da in den ersten 3 Gleichungen schon 3 Parameterwerte explizit angegeben sind, können die 4. bis 6. Gleichung vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} 32a+16b+8c+4\cdot1+2\cdot2+0=6\ &\rightarrow\ 32a+16b+8c=-2\\ 80a+32b+12c+4\cdot1+2=0\ &\rightarrow\ 80a+32b+12c=-6\\ 160a+48b+12c+2\cdot1=-2\ &\rightarrow\ 160a+48b+12c=-4\end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{Matrix}} \begin{pmatrix} 32 & 16 & 8 & -2\\ 80 & 32 & 12 & -6\\ 160 & 48 & 12 & -4\end{pmatrix}$$







$\rightarrow$ $a=0{,}5$, $b=-2{,}375$, $c=2{,}5$

Daraus folgt: $h(x)=0{,}5\cdot x^5-2{,}375\cdot x^4+2{,}5\cdot x^3+x^2+2\cdot x$