Auffinden von Symmetriepunkten bei Graphen mit Hilfe der Bedingung für Punktsymmetrie

$f(x)=-f(-x+2u)+2v$ ist die Bedingung für Punktsymmetrie bei einer Funktion.

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man den Symmetriepunkt dieser Funktion finden (sofern er existiert).

Zunächst setzt man die gegebene Funktionsgleichung in die Formel ein.
Man erhält dabei eine Gleichung mit den 3 Variablen x, u und v.

Lösungsansatz 1:

Da die Gleichung für <u>alle x</u> erfüllt sein muss (bei einem punktsymmetrischen Funktionsgraph hat jeder Punkt einen Spiegelpunkt), wählt man zwei beliebige x und erhält daraus ein Gleichungssystem, das aus zwei Gleichungen mit den beiden Variablen u und v besteht.

Gibt es mehrere Lösungen für u und v, so muss man noch überprüfen, welche Lösung richtig ist.
Dazu setzt man die u- und v-Werte in eine Gleichung mit einem dritten x-Wert ein.

Lösungsansatz 2 (geeignet für ganzrationale Funktionen):

In der Gleichung mit den Variablen x, u und v klammert man die Potenzen von x aus. Die Koeffizienten der Potenzen von x müssen alle den Wert 0 haben. Aus dieser Bedingung ergibt sich ein Gleichungssystem mit 2 Variablen, das als Lösung die gesuchten Werte für u und v besitzt.

Beispielaufgabe:

Berechnen Sie den Symmetriepunkt der Funktion f mit der Gleichung $f(x)=x^3-2x^2+x-4$

$f(-x+2u)=(-x+2u)^3-2(-x+2u)^2+(-x+2u)-4=$

$-x^3+6x^2u-12xu^2+8u^3-2x^2+8xu-8u^2-x+2u-4$

Daraus folgt $-f(-x+2u)+2v=+x^3-6x^2u+12xu^2-8u^3+2x^2-8xu+8u^2+x-2u+4+2v$

Gleich f(x) setzen: $x^3-2x^2+x-4=+x^3-6x^2u+12xu^2-8u^3+2x^2-8xu+8u^2+x-2u+4+2v$

Daraus folgt: $6x^2u-12xu^2+8u^3-4x^2+8xu-8u^2+2u-8-2v=0$

Lösungsansatz 1:

$x=0 \;\rightarrow\; 8u^3-8u^2+2u-8-2v=0$

$x=1 \;\rightarrow\; 6u-12u^2+8u^3-4+8u-8u^2+2u-8-2v=0$

Subtrahiert man von der Gleichung für x=1 die Gleichung für x=0, so ergibt sich $6u-12u^2-4+8u=0$

Lösen dieser Gleichung: $-12u^2+14u-4=0 \;\rightarrow\; u^2-\frac{14}{12}u+\frac{4}{12}=0 \;\rightarrow\; u^2-\frac{7}{6}u+\frac{1}{3}=0 \;\rightarrow$

$$u_{1,2}=\frac{7}{12}\pm\sqrt{\frac{49}{144}-\frac{1}{3}}=\frac{7}{12}\pm\sqrt{\frac{49}{144}-\frac{48}{144}}=\frac{7}{12}\pm\sqrt{\frac{1}{144}}=\frac{7}{12}\pm\frac{1}{12} \;\rightarrow\; u_1=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}\;;\; u_2=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Aus der Gleichung für x=0 ergibt sich der v-Wert:

$$u_1=\frac{2}{3} \;\rightarrow\; 8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3-8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)-8-2v_1=0 \;\rightarrow\; \frac{64}{27}-\frac{32}{9}+\frac{4}{3}-8=2v_1 \;\rightarrow\; \frac{64-96+36-216}{27}=2v_1 \;\rightarrow$$

$$-\frac{212}{27}=2v_1 \;\rightarrow\; v_1=-\frac{106}{27}$$

$u_2 = \frac{1}{2} \rightarrow 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 8 - 2 v_2 = 0 \rightarrow 1 - 2 + 1 - 8 = 2 v_2 \rightarrow -8 = 2 v_2 \rightarrow v_2 = -4$

$x = -1 \,;\, u = \frac{2}{3} \,;\, v = -\frac{106}{27} \rightarrow 4 + \frac{16}{3} + \frac{64}{27} - 4 - \frac{16}{3} - \frac{32}{9} + \frac{4}{3} - 8 + \frac{212}{27} = 0$

$x = -1 \,;\, u = \frac{1}{2} \,;\, v = -4 \rightarrow 3 + 3 + 1 - 4 - 4 - 2 + 1 - 8 + 8 = -2 \neq 0$

Der Spiegelpunkt liegt also bei $\left(\frac{2}{3} / -\frac{106}{27}\right)$. (Übrigens: Hier ist es der Wendepunkt der Kurve! Warum muss das so sein?)

Lösungsansatz 2:

$$6x^2 u - 12 x u^2 + 8 u^3 - 4 x^2 + 8 x u - 8 u^2 + 2 u - 8 - 2 v = x^2 \cdot (6u - 4) + x \cdot (-12 u^2 + 8 u) + 1 \cdot (8 u^3 - 8 u^2 + 2 u - 8 - 2 v) = 0$$

Daraus folgt das Gleichungssystem
$$\begin{array}{c} 6u - 4 = 0 \\ -12 u^2 + 8 u = 0 \\ 8 u^3 - 8 u^2 + 2 u - 8 - 2 v = 0 \end{array}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$6u - 4 = 0 \rightarrow 6u = 4 \rightarrow u = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Überprüfen in der 2. Gleichung:

$-12 u^2 + 8 u = -12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 8 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{48}{9} + \frac{16}{3} = -\frac{48}{9} + \frac{48}{9} = 0$

Anmerkung: Da in den Gleichungen 1 und 2 nur die Variable u auftaucht, reicht das Lösen einer der beiden Gleichungen. Man nimmt für die Rechnung natürlich möglichst die „einfachste" Gleichung. Warum?
Hätte man zuerst die Gleichung 2 gelöst, ergeben sich 2 Lösungen:

$-12 u^2 + 8 u = 0 \rightarrow u \cdot (-12 u + 8) = 0 \rightarrow u_1 = 0 \;\; ; \;\; u_2 = \frac{2}{3}$

Nun muss man noch mit Hilfe der 1. Gleichung entscheiden, welche dieser Lösungen richtig ist.

3. Gleichung:

$8 u^3 - 8 u^2 + 2 u - 8 - 2 v = 0 \rightarrow 2 v = 8 u^3 - 8 u^2 + 2 u - 8 = 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{64}{27} - \frac{32}{9} + \frac{4}{3} - 8 =$

$\frac{64 - 96 + 36 - 216}{27} = \frac{-212}{27} \xrightarrow{:2} v = -\frac{106}{27}$

Der Spiegelpunkt (u/v) liegt also bei $\left(\frac{2}{3} / -\frac{106}{27}\right)$.