

## Auffinden von Symmetriepunkten bei Graphen mit Hilfe der Bedingung für Punktsymmetrie

$f(x) = -f(-x+2u) + 2v$  ist die Bedingung für Punktsymmetrie bei einer Funktion.

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man den Symmetriepunkt dieser Funktion finden (sofern er existiert).

Zunächst setzt man die gegebene Funktionsgleichung in die Formel ein.

Man erhält dabei eine Gleichung mit den 3 Variablen  $x$ ,  $u$  und  $v$ .

Da die Gleichung für alle  $x$  erfüllt sein muss (bei einem punktsymmetrischen Funktionsgraph hat jeder Punkt einen Spiegelpunkt), wählt man zwei beliebige  $x$  und erhält daraus ein Gleichungssystem, das aus zwei Gleichungen mit den beiden Variablen  $u$  und  $v$  besteht.

Gibt es mehrere Lösungen für  $u$  und  $v$ , so muss man noch überprüfen, welche Lösung richtig ist.

Dazu setzt man die  $u$ - und  $v$ -Werte in eine Gleichung mit einem dritten  $x$ -Wert ein.

### Beispielaufgabe:

Berechnen Sie den Symmetriepunkt der Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$

$$f(-x+2u) = (-x+2u)^3 - 2(-x+2u)^2 + (-x+2u) - 4 =$$

$$-x^3 + 6x^2u - 12xu^2 + 8u^3 - 2x^2 + 8xu - 8u^2 - x + 2u - 4$$

Daraus folgt  $-f(-x+2u) + 2v = +x^3 - 6x^2u + 12xu^2 - 8u^3 + 2x^2 - 8xu + 8u^2 + x - 2u + 4 + 2v$

Gleich  $f(x)$  setzen:  $x^3 - 2x^2 + x - 4 = +x^3 - 6x^2u + 12xu^2 - 8u^3 + 2x^2 - 8xu + 8u^2 + x - 2u + 4 + 2v$

Daraus folgt:  $6x^2u - 12xu^2 + 8u^3 - 4x^2 + 8xu - 8u^2 + 2u - 8 - 2v = 0$

$$x=0 \rightarrow 8u^3 - 8u^2 + 2u - 8 - 2v = 0$$

$$x=1 \rightarrow 6u - 12u^2 + 8u^3 - 4 + 8u - 8u^2 + 2u - 8 - 2v = 0$$

Subtrahiert man von der Gleichung für  $x=1$  die Gleichung für  $x=0$ , so ergibt sich  $6u - 12u^2 - 4 + 8u = 0$

Lösen dieser Gleichung:  $-12u^2 + 14u - 4 = 0 \rightarrow u^2 - \frac{14}{12}u + \frac{4}{12} = 0 \rightarrow u^2 - \frac{7}{6}u + \frac{1}{3} = 0 \rightarrow$

$$u_{1,2} = \frac{7}{12} \pm \sqrt{\frac{49}{144} - \frac{1}{3}} = \frac{7}{12} \pm \sqrt{\frac{49}{144} - \frac{48}{144}} = \frac{7}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{144}} = \frac{7}{12} \pm \frac{1}{12} \rightarrow u_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}; u_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Aus der Gleichung für  $x=0$  ergibt sich der  $v$ -Wert:

$$u_1 = \frac{2}{3} \rightarrow 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - 8 - 2v_1 = 0 \rightarrow \frac{64}{27} - \frac{32}{9} + \frac{4}{3} - 8 = 2v_1 \rightarrow \frac{64 - 96 + 36 - 216}{27} = 2v_1 \rightarrow$$

$$-\frac{212}{27} = 2v_1 \rightarrow v_1 = -\frac{106}{27}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \rightarrow 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 8 - 2v_2 = 0 \rightarrow 1 - 2 + 1 - 8 = 2v_2 \rightarrow -8 = 2v_2 \rightarrow v_2 = -4$$

$$x=-1; u=\frac{2}{3}; v=-\frac{106}{27} \rightarrow 4 + \frac{16}{3} + \frac{64}{27} - 4 - \frac{16}{3} - \frac{32}{9} + \frac{4}{3} - 8 + \frac{212}{27} = 0$$

$$x=-1; u=\frac{1}{2}; v=-4 \rightarrow 3 + 3 + 1 - 4 - 4 - 2 + 1 - 8 + 8 = -2 \neq 0$$

Der Spiegelpunkt liegt also bei  $\left(\frac{2}{3} / -\frac{106}{27}\right)$ . (Übrigens: Hier ist es der Wendepunkt der Kurve! Warum muss das so sein?)