Die Regel von de l'Hospital (Marquis de l' Hospital, 1661-1704, Schüler von Johann Bernoulli)

Existieren folgende Grenzwerte? $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\to\frac{0}{0}$? ; $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{x-1}\to\frac{\infty}{\infty}$? ; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2}\right)\to\infty\cdot 0$?

Die rechts stehenden Terme sind nicht definiert, obwohl die links stehenden Terme einen bestimmbaren Wert besitzen. Die Lösungen kann man leicht mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital berechnen:

Regel von de l'Hospital:
Wenn zwei Funktionen f und g existieren mit den Eigenschaften $f(a)=0$ und $g(a)=0$ und $g'(a)\neq 0$, wobei a aus dem Definitionsbereich von f und g stammt, so gilt $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}}$.

Um den Grenzwert zu finden, leitet man also nur den Zähler für sich und den Nenner für sich ab und bildet dann den Grenzwert aus dem Quotienten dieser Ableitungen.

Beweis:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\text{erweitern mit}\frac{1}{x-a}}{=}\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)}{x-a}}\overset{f(a)=0\text{ und }g(a)=0}{=}\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Diese Regel gilt auch für den Fall $x\to\infty$ mit $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ und $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{x=\frac{1}{z}}{=}\lim_{z\to 0}\frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})}\overset{\text{de l'Hospital ; Kettenregel}}{=}\lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'(\frac{1}{z})\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}\overset{\text{kürzen}}{=}\lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})}\overset{\frac{1}{z}=x}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Mit Hilfe des oben behandelten Falls $\frac{0}{0}$ können auch für die Fälle $\frac{\infty}{\infty}$ und $0\cdot\infty$ entsprechende Formeln bewiesen werden:

Falls f(x) und g(x) für $x\to a$ gegen unendlich gehen (also Fall $\frac{\infty}{\infty}$) und $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\neq 0$, gilt $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$. a darf dabei auch ∞ sein.

Beweis: $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\overset{\text{de l'Hospital}}{=}\lim_{x\to a}\frac{\left(-\frac{1}{g^2(x)}\right)\cdot g'(x)}{\left(-\frac{1}{f^2(x)}\right)\cdot f'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^2(x)}{g^2(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

Daraus folgt: $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^2(x)}{g^2(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\xrightarrow{\text{dividieren durch }\frac{f(x)}{g(x)}\text{ und }\frac{g'(x)}{f'(x)}}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Also gilt dieselbe Formel wie oben.

Der Fall $0 \cdot \infty$ lässt sich auf $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zurückführen:

Geht f(x) für $x \to a$ gegen 0 und g(x) gegen ∞, so formt man um

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ zum Fall $\frac{0}{0}$ und

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ zum Fall $\frac{\infty}{\infty}$.

Lösung der Aufgaben von Seite 1 oben:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{0-(-\sin x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$$

Hier wurde die Regel von de l'Hospital 2-mal nacheinander angewendet.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}}{1-0} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2} \right) \overset{\text{wegen}\,\infty\cdot 0}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \overset{\text{de l'Hospital und Kettenregel}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\cos \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{2}{x^3} \right)}{\left(-\frac{2}{x^3} \right)} \overset{\text{kürzen}}{=} \lim_{x \to \infty} \cos \frac{1}{x^2} = \cos 0 = 1$$