Quotientenregel der Differentialrechnung

Gegeben ist die Funktion f , deren Funktionsterm sich aus dem Quotienten zweier von x abhängiger Funktionen u und v zusammensetzt: $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$

Gesucht ist die Ableitung dieser Funktion.

Definition der Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{u(x)}{v(x)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{u(x)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x)}{v(x)\cdot v(x_0)}}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x)}{v(x)\cdot v(x_0)\cdot(x-x_0)}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{u(x)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x)}{(x-x_0)}}{v(x)\cdot v(x_0)}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{u(x)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v(x)+u(x_0)\cdot v(x_0)}{(x-x_0)}}{v(x)\cdot v(x_0)}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}}{v(x)\cdot v(x_0)}=$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\left(v(x)\cdot v(x_0)\right)}=\frac{u'(x_0)\cdot v(x_0)-u(x_0)\cdot v'(x_0)}{\left(v(x_0)\right)^2}$$

Beachten Sie das „Prinzip der hilfreichen Null“ in der zweiten Zeile der Herleitung (in roter Schrift):

Obwohl der rot geschriebene Teil des Terms insgesamt den Wert 0 hat, kann man ihn durch Trennen und unterschiedliche Zuordnung nutzen, um das Ergebnis zu erhalten.

Beispiel:

$$f(x)=\frac{x^2}{\sin x}\qquad u(x)=x^2\qquad u'(x)=2\mathrm{x}\qquad v(x)=\sin x\qquad v'(x)=\cos x$$

$$f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}=\frac{2\mathrm{x}\cdot\sin x-x^2\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$