Produktregel der Differentialrechnung

Gegeben ist die Funktion f , deren Funktionsterm sich aus dem Produkt zweier von x abhängiger Funktionen u und v zusammensetzt: $f(x)=u(x)\cdot v(x)$
Gesucht ist die Ableitung dieser Funktion.

Definition der Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\cdot v(x)-u(x_0)\cdot v(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\cdot v(x)\color{red}{-u(x_0)\cdot v(x)+u(x_0)\cdot v(x)}-u(x_0)\cdot v(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\cdot v(x)+u(x_0)\cdot\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right)=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}v(x)+u(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}=u'(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0)$$

Beachten Sie das „Prinzip der hilfreichen Null“ in der ersten Zeile der Herleitung (in roter Schrift): Obwohl der rot geschriebene Teil des Terms insgesamt den Wert 0 hat, kann man ihn durch Trennen und unterschiedliche Zuordnung nutzen, um das Ergebnis zu erhalten.

Beispiel:

$f(x)=x^2\cdot\sin x \quad u(x)=x^2 \quad u'(x)=2\mathrm{x} \quad v(x)=\sin x \quad v'(x)=\cos x$

$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=2\mathrm{x}\cdot\sin x+x^2\cdot\cos x$