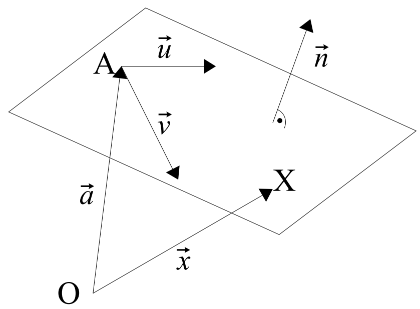
Normalenform der Ebenengleichung
Hessesche Normalenform
Abstand Punkt-Ebene



Ist A ein Punkt einer Ebene E mit dem Ortsvektor $\vec{a}$ und sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei Richtungsvektoren in der Ebene, so kann die Ebene beschrieben werden in Parameterform, wobei $\vec{x}$ ein Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt der Ebene ist: $E: \ \vec{x}=\vec{a}+\lambda\cdot\vec{v}+\mu\cdot\vec{u}$.

Während für die Parameterform 2 Richtungs-Vektoren benötigt werden, kann man die Ebene auch mit nur einem einzigen Vektor beschreiben. Durch einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht zur Ebene steht und durch Angabe eines Punktes A der Ebene durch seinen Ortsvektor $\vec{a}$ ist die Lage der Ebene vollständig festgelegt.

Alle in der Ebene liegenden Vektoren, also auch die Richtungsvektoren der Ebenengleichung, sind senkrecht zum Vektor $\vec{n}$. Es gilt in der Zeichnung also $\vec{u}*\vec{n}=0$ und $\vec{v}*\vec{n}=0$.

Aus diesem Gleichungssystem lässt sich mit Kenntnis der Richtungsvektoren der Normalenvektor $\vec{n}$ ermitteln. Relativ einfach geht das mit Hilfe des Vektorproduktes.

Ist A ein Punkt der Ebene, so gilt für alle Punkte X der Ebene, dass $\overrightarrow{AX}*\vec{n}=0$, weil $\overrightarrow{AX}\perp\vec{n}$.

Mit den Bezeichnungen in der Abbildung gilt also $(-\vec{a}+\vec{x})*\vec{n}=0 \ \rightarrow \ \vec{x}*\vec{n}-\vec{a}*\vec{n}=0$ und mit $c=\vec{a}*\vec{n}$ kann man schreiben

$$\boxed{NF: \quad \vec{x}*\vec{n}-c=0}$$

Diese Gleichung nennt man Normalenform (NF) der Ebenengleichung. Setzt man einen Vektor $\vec{x}$ in die Gleichung ein, so ist diese Gleichung erfüllt, wenn X in der Ebene liegt. Wenn X nicht in der Ebene liegt, ergibt sich auf der rechten Seite der Gleichung ein Wert ungleich 0.

Beispiel:

Ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene und $\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix}$ ein Ortsvektor zu einem Punkt in der Ebene, so

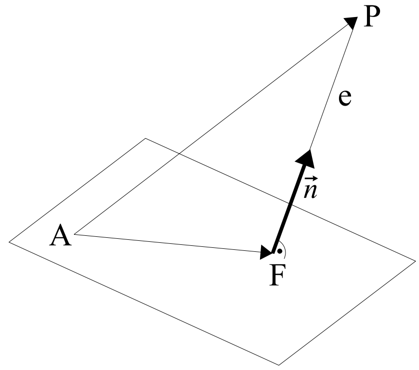
gilt wegen $c=\vec{a}*\vec{n}=\begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=-8-5+3=-10$

die Normalenform $NF: \ \vec{x}*\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}-(-10)=0$ oder $NF: \ \vec{x}*\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+10=0$.

$P(2/8/-2)$ ist ein Punkt der Ebene wegen $\begin{pmatrix}2\\8\\-2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+10=4-8-6+10=0$

$Q(3/-5/1)$ ist kein Punkt der Ebene wegen $\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+10=6+5+3+10=24\neq0$

Sei A ein Punkt der Ebene E, $\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebene E
und P ein Punkt, der nicht zur Ebene E gehört.



Dann wird man den Abstand des Punktes P zur Ebene dadurch ermitteln,
dass man von P das Lot auf die Ebene E fällt,
den Fußpunkt F des Lotes ermittelt und die Entfernung FP berechnet.
$\vec{n}$ hat die gleiche Richtung wie das Lot.

Nun gilt: $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FP}$

Multiplikation mit $\vec{n}$ liefert:
$\overrightarrow{AP}*\vec{n}=(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FP})*\vec{n}=\overrightarrow{AF}*\vec{n}+\overrightarrow{FP}*\vec{n}=0+\overrightarrow{FP}*\vec{n}=\overrightarrow{FP}*\vec{n}$

Hätte nun $\vec{n}$ die Länge 1, so würde das Ergebnis der Rechnung die Entfernung e ergeben, da das Produkt von 2 Vektoren, die parallel sind, das Produkt ihrer Längen ist (Falls $\vec{a}\|\vec{b}$, gilt $\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$).

Setzt man in die Rechnung also den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$ ein, der die Länge 1 besitzt, so gilt

$\overrightarrow{AP}*\vec{n}_0=\overrightarrow{FP}*\vec{n}_0=FP\cdot 1=FP=e$

Auf Seite 1 wurde die Normalenform der Ebenengleichung eingeführt: $NF:\quad \vec{x}*\vec{n}-c=0$

Teilt man diese Gleichung durch die Länge von $\vec{n}$, so erhält man $\vec{x}*\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}-\frac{c}{|\vec{n}|}=0$.

Setzt man $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\vec{n}_0$ und $\frac{c}{|\vec{n}|}=d$ so ergibt sich die Hessesche Normalenform (HNF):

$$\boxed{HNF:\quad \vec{x}*\vec{n}_0-d=0}$$

Nun setzen wir in der Abstandsberechnung oben die Ortsvektoren $\vec{a}$ zum Punkt A und $\vec{p}$ zum Punkt P und dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$ ein:

$\overrightarrow{AP}*\vec{n}=(-\vec{a}+\vec{p})*\vec{n}_0=\vec{p}*\vec{n}_0-\vec{a}*\vec{n}_0$

Dieser Term hat den gleichen Aufbau wie die HNF: $\vec{p}$ statt $\vec{x}$ und $\vec{a}*\vec{n}_0$ statt d.

Es ergibt sich hier aber nicht 0, sondern e, der Abstand des Punktes zur Ebene.

Daraus folgern wir:

Setzt man in die HNF für $\vec{x}$ den Ortsvektor eines Punktes ein, der nicht in der Ebene liegt, so erhält man rechts in der HNF nicht 0, sondern den Abstand des Punktes von der Ebene:

Abstand eines Punktes mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ von der Ebene: $\boxed{\vec{x}*\vec{n}_0-d=e}$

Beispiel:

Sei $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $A(-4/5/1)$ ein Punkt der Ebene und $Q(3/-5/1)$ ein Punkt, der nicht in der Ebene liegt, so gilt:

$$\vec{n}_0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\quad;\quad d=\begin{pmatrix}-4\\5\\1\end{pmatrix}*\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot(-8-5+3)=\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot(-10)$$

$$\vec{q}*\vec{n}_0-d=\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}*\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\frac{10}{\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot(6+5+3+10)=\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot 24\approx 6{,}4$$

Der Abstand von Q zur Ebene beträgt also etwa 6,4 Einheiten.