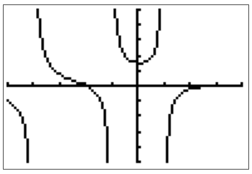
Kurvenuntersuchung auf Nullstellen, Pole und Extrema

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x)=\frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x+4)}$.



Nullstellen:
Der Zähler des Bruches muss zu 0 werden: $(x+2)(x-3)=0 \Rightarrow x_1=-2; x_2=+3$

Pole:
Der Nenner des Bruches muss zu 0 werden: $(x-1)(x+1)(x+4)=0 \Rightarrow x_1=+1; x_2=-1; x_3=-4$

Extrema:
Die 1. Ableitung der Funktion muss den Wert 0 annehmen:
Zunächst werden die Klammern im Zähler und im Nenner aufgelöst:

$$f(x)=\frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x+4)}=\frac{x^2-3x+2x-6}{(x^2-1)(x+4)}=\frac{x^2-x-6}{x^3+4x^2-x-4}$$

Ableitung mit Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$:

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^3+4x^2-x-4)-(x^2-x-6)(3x^2+8x-1)}{(x^3+4x^2-x-4)^2}=$$

$$\frac{2x^4+8x^3-2x^2-8x-x^3-4x^2+x+4-3x^4-8x^3+x^2+3x^3+8x^2-x+18x^2+48x-6}{(x^3+4x^2-x-4)^2}=$$

$$\frac{-x^4+2x^3+21x^2+40x-2}{(x^3+4x^2-x-4)^2}$$

Da Extrema an den Stellen liegen, für die $f'(x)=0$, muss der Bruch gleich 0 gesetzt werden:

$$\frac{-x^4+2x^3+21x^2+40x-2}{(x^3+4x^2-x-4)^2}=0 \overset{mal\ Nenner}{\Rightarrow} -x^4+2x^3+21x^2+40x-2=0$$

Für eine solche Gleichung 4. Grades gibt es zwar eine Lösungsformel, die aber sehr umständlich ist.

Andere Methoden zum Lösen komplexer Gleichungen sind z. B.

- Raten einer Lösung x_1 .
  Dann den Gleichungs-Term durch $(x-x_1)$ dividieren.
  Übrig bleibt ein Term, dessen Grad sich zur vorherigen Gleichung um 1 verringert hat.
  Dieser neue Term gleich 0 gesetzt ergibt dann die weiteren Lösungen.
- Newtonverfahren

Mit dem GTR lassen sich die Lösungen sehr leicht finden, allerdings sind die Lösungen nur Näherungswerte.
Folgende Vorgehensweisen sind möglich:

- GTR-Funktion SOLVER löst Gleichungen der Art ... = 0, also auch unsere Gleichung
  $-x^4+2x^3+21x^2+40x-2=0$
- Schreibt man die linke Seite der Gleichung als Funktionsterm: $f(x)=-x^4+2x^3+21x^2+40x-2$, so kann man die Nullstellen dieser Funktion (=Lösung der Gleichung) mit der GTR-Funktion CALC-ZERO finden.
- Noch einfacher ist es, die gegebene Funktion unter der GTR-Funktion Y= einzugeben und dann mit CALC-MINIMUM bzw. CALC-MAXIMUM die Extrema dieser Funktion zu finden.
- Auch das Ableiten der Funktion kann man sich abnehmen lassen, indem man zur Eingabe
  $Y1=-x^4+2x^3+21x^2+40x-2$ in den Zeile Y2 ergänzt: $Y2=nDerive(Y1(X),X,X)$

Genauere Erläuterungen zu diesen Anwendungen mit dem GTR findet man auf der Seite TI-84 im Mathematikunterricht der Klasse 11.