Beispiel für die Untersuchung einer Funktionenschar

Gegeben ist $f_k(x)=\dfrac{x-k+2}{x^2-k}$ für $k \in \mathbb{R}$.

Definitionsbereich

Kritisch sind die Stellen, an denen der Nenner zu 0 wird: $x^2-k=0 \;\rightarrow\; x^2=k \;\rightarrow\; x_{1,2}=\pm\sqrt{k}$
Daraus folgt: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{k};-\sqrt{k}\}$

Definitionslücken

Da der Zähler bei $x_{1,2}=\pm\sqrt{k}$ nicht 0 wird, liegen bei diesen x-Werten jeweils Pole vom Grad 1 vor.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

y-Achse: $f_k(0)=\dfrac{-k+2}{-k}=1-\dfrac{2}{k}$

x-Achse: $f_k(x)=\dfrac{x-k+2}{x^2-k}=0 \;\rightarrow\; x-k+2=0 \;\rightarrow\; x=k-2$

Extrempunkte

Bedingung: $f_k{}'(x)=0$

$$f_k{}'(x) \overset{\text{Quotientenregel}}{=} \frac{1\cdot(x^2-k)-(x-k+2)\cdot 2x}{\left(x^2-k\right)^2} = \frac{x^2-k-2x^2+2kx-4x}{\left(x^2-k\right)^2}=\frac{-x^2+2kx-4x-k}{\left(x^2-k\right)^2}\overset{!}{=}0$$

$$-x^2+2kx-4x-k=0 \overset{\cdot(-1)}{\rightarrow} x^2-2kx+4x+k=0 \;\rightarrow$$
$$x_{1,2}=k-2\pm\sqrt{(k-2)^2-k}=k-2\pm\sqrt{k^2-4k+4-k}=k-2\pm\sqrt{k^2-5k+4}$$

Asymptotisches Verhalten

Da bei $f_k(x)=\dfrac{x-k+2}{x^2-k}$ der Grad des Nenners um 1 größer ist als der des Zählers, gehen die Funktionswerte unabhängig von k für $x\rightarrow\pm\infty$ gegen 0.
Die x-Achse ist also eine waagrechte Asymptote.
Senkrechte Asymptoten befinden sich bei den Polstellen.

Abhängigkeiten der oben gefundenen Eigenschaften vom k-Wert
Definitionsbereich und Polstellen:

1. Fall: k > 0 → Es existieren 2 Pole mit Vorzeichenwechsel, da die Wurzeln 2 verschiedene Werte annehmen.

2. Fall: k = 0 → Die Wurzeln haben identische Werte, es liegt also 1 Pol ohne Vorzeichenwechsel vor.

3. Fall: k < 0 → Es gibt keine undefinierten Stellen und damit auch keine Polstellen, da die Wurzeln keine reellen Werte haben (negative Zahl unter der Wurzel)

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

y-Achse:

1. Fall: k ≠ 0 → Es gibt immer einen Schnittpunkt. Die Schnittpunkte liegen auf der gesamten y-Achse.

2. Fall: k = 0 → Es gibt keinen Schnittpunkt mit der y-Achse. In diesem Fall liegt bei x = 0 die doppelte Polstelle.

x-Achse: Für alle k außer 1 und 4 gibt es jeweils genau eine Nullstelle.
Begründung für die Ausnahmen: Der Nenner darf nicht 0 werden, was für $x=\pm\sqrt{k}$ der Fall wäre.
Dann gilt für die Nullstelle: $\pm\sqrt{k}=k-2 \overset{\text{quadrieren}}{\rightarrow} k=(k-2)^2=k^2-4k+4 \;\rightarrow\; k^2-5k+4=0$
Diese Gleichung hat die Lösungen 1 und 4 (s. u.).

Extrempunkte

Der Wert unter der Wurzel (wird „Diskriminante“ genannt) entscheidet darüber, ob ein Extrempunkt vorliegt.
Zunächst wird berechnet, wo die Nullstellen des Argumentes (=Wert unter der Wurzel) liegen:

$$k^2-5k+4=0 \;\rightarrow\; k_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-4}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25-16}{4}}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2} \;\rightarrow\; k_1=\frac{8}{2}=4\,;\,k_2=\frac{2}{2}=1$$

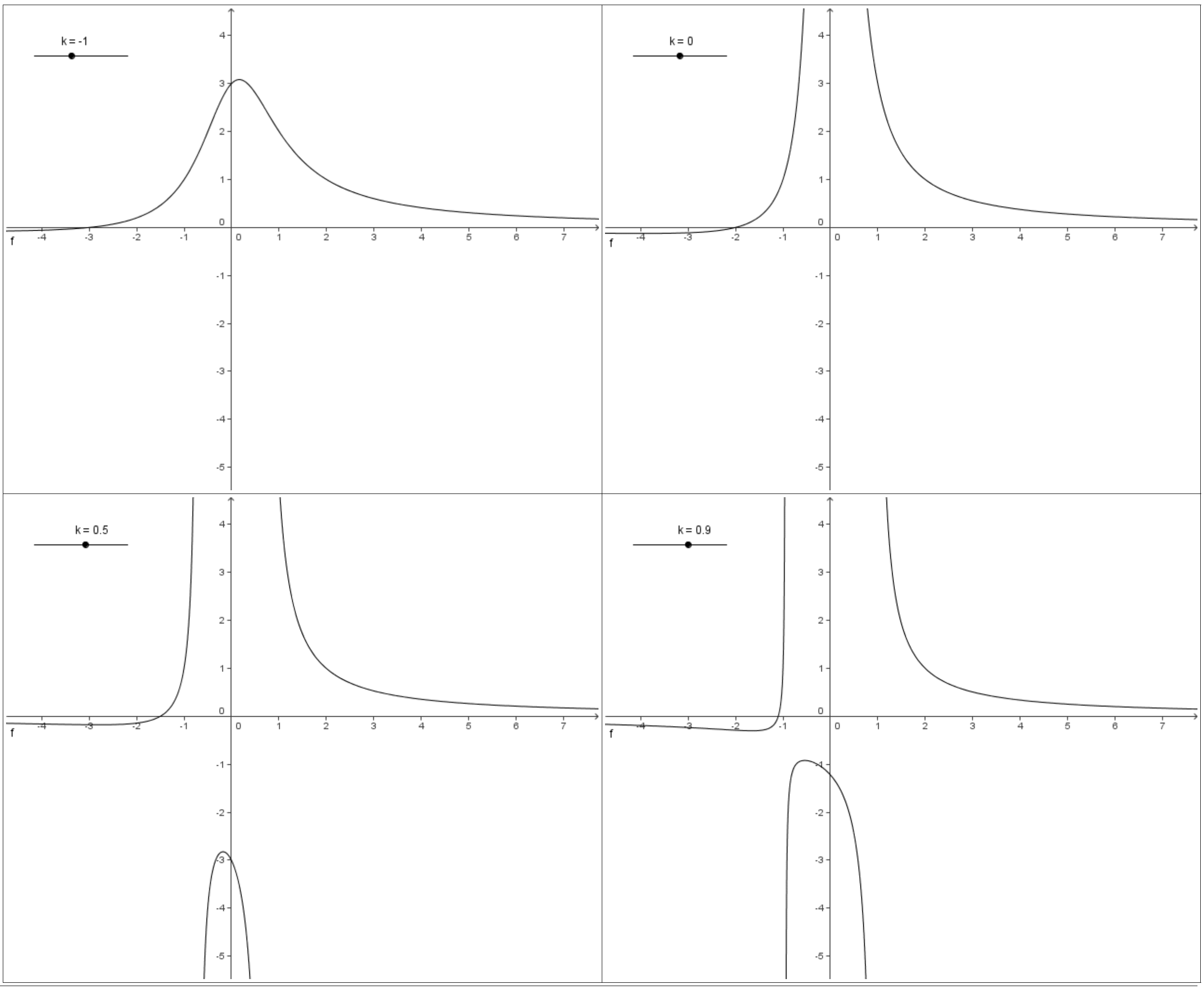
Unter der Wurzel ergibt sich also der Wert 0, wenn k = +1 oder k = +4 .
Es kommt nun auf das Vorzeichen in den Bereichen an, die durch diese Werte getrennt werden:

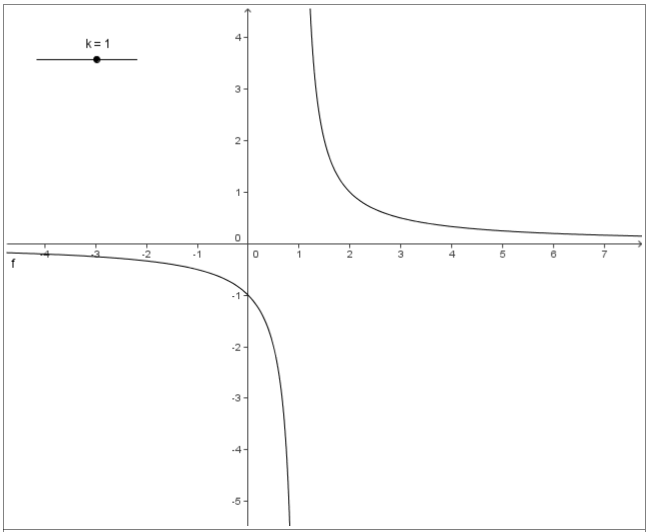
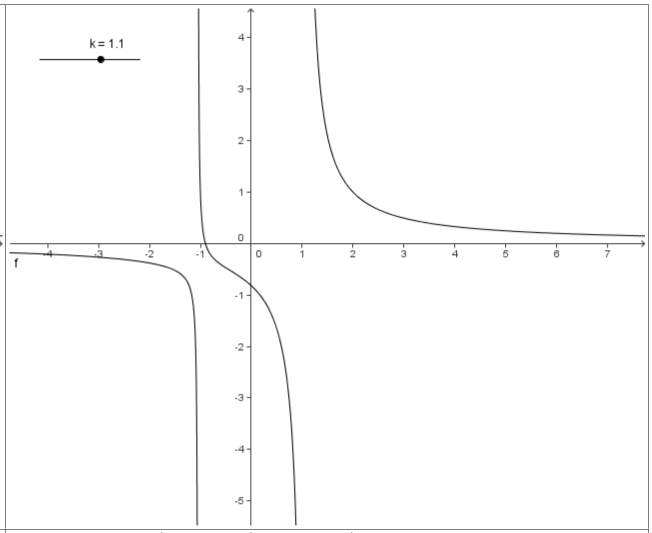
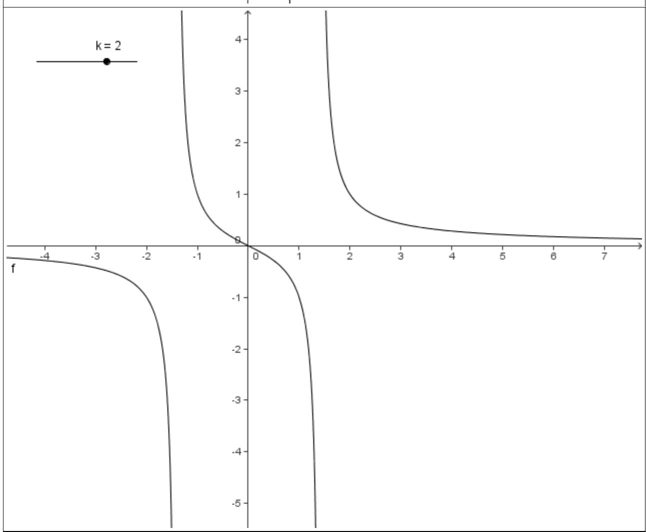
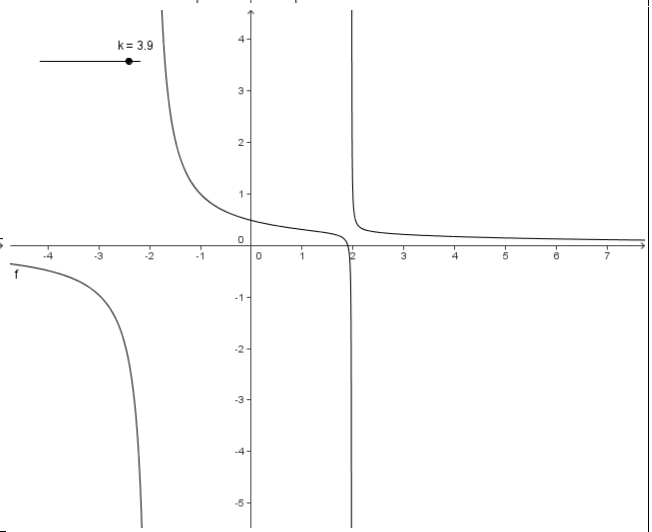
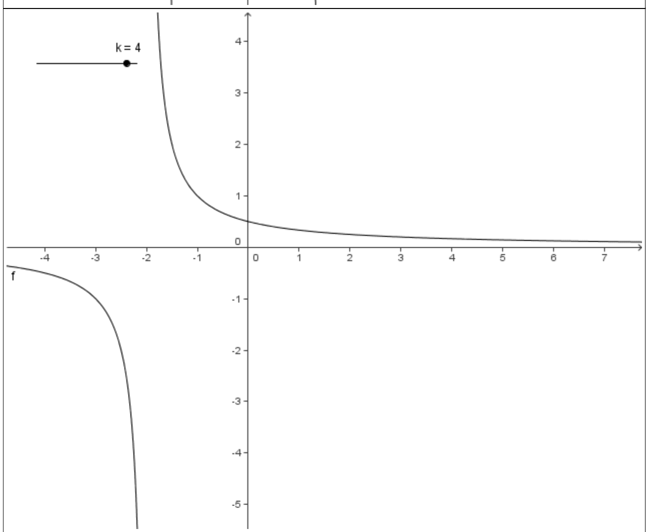
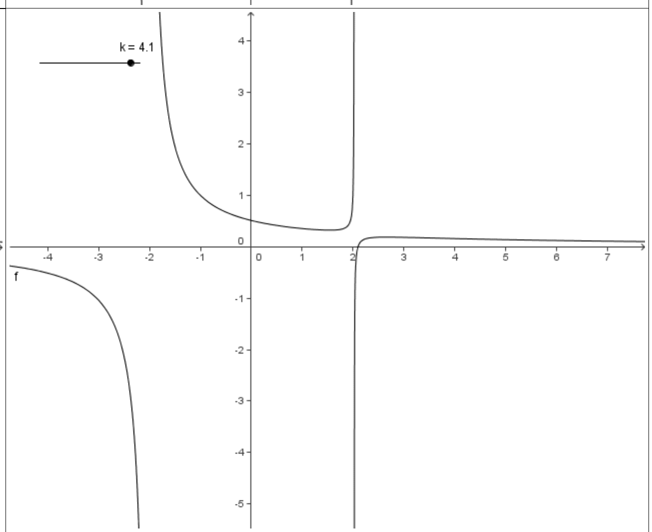
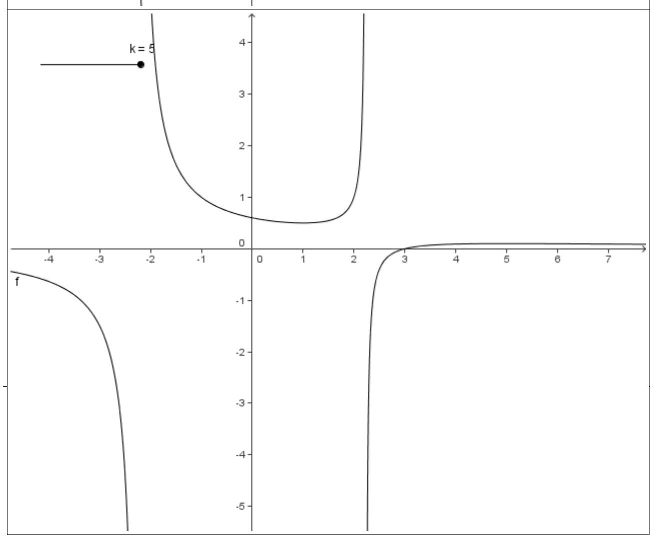
k < +1 → positiv
+1 < k < +4 → negativ
k > +4 → positiv

Extrema kann es also nur für k-Werte geben, die kleiner als 1 oder größer als 4 sind.

Graphen in Abhängigkeit von k

Die Fallunterscheidung zeigt, dass besondere Stellen bei x = 0 , x = 1 und x = 4 vorliegen.
Bei den Werten in den Zwischenbereichen wird sich die Art des Graphen nicht wesentlich ändern.




k = 1
f

k = 1.1
f

k = 2
f

k = 3.9
f

k = 4
f

k = 4.1
f

k = 5
f

Alle Kurven mit Ausnahme der von f_1 und f_4 schneiden sich in zwei Punkten

Die Schnittpunkte von f_a und f_b werden berechnet:

$$\frac{x-a+2}{x^2-a}=\frac{x-b+2}{x^2-b} \rightarrow (x-a+2)(x^2-b)=(x-b+2)(x^2-a)\rightarrow$$

$$x^3-bx-ax^2+ab+2x^2-2b=x^3-ax-bx^2+ab+2x^2-2a \rightarrow -bx-ax^2-2b=-ax-bx^2-2a \rightarrow$$

$$(b-a)\cdot x^2-(b-a)\cdot x-2\cdot(b-a)=0$$

Da a ≠ b vorausgesetzt werden kann (es sollen ja zwei verschiedene Kurven untersucht werden), kann man durch (b-a) dividieren:

$$x^2-x-2=0 \rightarrow x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1+8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2} \rightarrow x_1=\frac{4}{2}=2;\, x_2=-\frac{2}{2}=-1$$

$$f_k(2)=\frac{2-k+2}{4-k}=\frac{4-k}{4-k}=1 \qquad f_k(-1)=\frac{-1-k+2}{1-k}=\frac{1-k}{1-k}=1$$

Also sind unabhängig von k die Punkte (2/1) und (-1/1) Punkte und Schnittpunkte der Graphen.

Da der Nenner nicht zu 0 werden darf, gehört für k = 1 nur der Punkt (2/1) und für k = 4 nur der Punkt (-1/1) zum jeweiligen Graphen.

Kann es sein, dass die Graphen von f_a und f_b sich rechtwinklig schneiden (a>0 und b>0)?

Es muss gezeigt werden, dass $f_a'(-1)=-\frac{1}{f_b'(-1)}$ oder $f_a'(2)=-\frac{1}{f_b'(2)}$

Es gilt mit $f_k'(x)=\frac{-x^2+2kx-4x-k}{\left(x^2-k\right)^2}$ und $x=-1$:

$$f_k'(-1)=\frac{-1-2k+4-k}{(1-k)^2}=\frac{3-3k}{(1-k)^2}=\frac{3\cdot(1-k)}{(1-k)^2}=\frac{3}{1-k}$$

Werden für in der Formel für k die Variablen a und b eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{3}{1-a}=-\frac{1}{\frac{3}{1-b}} \rightarrow \frac{3}{1-a}=-\frac{1-b}{3} \rightarrow \frac{9}{1-a}=-1+b \rightarrow b=\frac{9}{1-a}+1$$

Für alle a mit Ausnahme von a = 1 gibt es also ein b, so dass die Bedingung erfüllt ist, d. h. dass sich dann auch die beiden Graphen senkrecht schneiden.

Dieselbe Rechnung für a = 2:

$$f_k'(2)=\frac{-4+4k-8-k}{(4-k)^2}=\frac{-12+3k}{(4-k)^2}=\frac{-3\cdot(4-k)}{(4-k)^2}=\frac{-3}{4-k}$$

$$\frac{-3}{4-a}=-\frac{1}{\frac{-3}{4-b}} \rightarrow -\frac{3}{4-a}=-\frac{4-b}{-3} \rightarrow \frac{9}{4-a}=-4+b \rightarrow b=\frac{9}{4-a}+4$$

Für alle a mit Ausnahme von a = 4 gibt es auch hier ein b, so dass die Bedingung erfüllt ist, d. h. dass sich dann auch die beiden Graphen senkrecht schneiden.