Beispiel für die Untersuchung einer Kurvenschar

Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit der Gleichung $f_a(x)=\dfrac{2ax}{a+x^2}$.

Ableitungen unter Benutzung der Quotientenregel $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ und der Kettenregel

$$f_a'(x)=\frac{2a\cdot(a+x^2)-2ax\cdot 2x}{(a+x^2)^2}=\frac{2a^2+2ax^2-4ax^2}{(a+x^2)^2}=\frac{2a^2-2ax^2}{(a+x^2)^2}$$

$$f_a''(x)=\frac{-4ax\cdot(a+x^2)^2-(2a^2-2ax^2)\cdot 2\cdot(a+x^2)\cdot 2x}{(a+x^2)^4}=\frac{-4ax\cdot(a+x^2)-(2a^2-2ax^2)\cdot 2\cdot 2x}{(a+x^2)^3}=$$

$$\frac{-4a^2x-4ax^3-8a^2x+8ax^3}{(a+x^2)^3}=\frac{4ax^3-12a^2x}{(a+x^2)^3}=4a\cdot\frac{x^3-3ax}{(a+x^2)^3}$$

$$f_a'''(x)=4a\cdot\frac{(3x^2-3a)\cdot(a+x^2)^3-(x^3-3ax)\cdot 3\cdot(a+x^2)^2\cdot 2x}{(a+x^2)^6}=4a\cdot\frac{(3x^2-3a)\cdot(a+x^2)-(x^3-3ax)\cdot 3\cdot 2x}{(a+x^2)^4}$$

$$=4a\cdot\frac{3ax^2+3x^4-3a^2-3ax^2-6x^4+18ax^2}{(a+x^2)^4}=4a\cdot\frac{-3x^4+18ax^2-3a^2}{(a+x^2)^4}=-12a\cdot\frac{x^4-6ax^2+a^2}{(a+x^2)^4}$$

Definitionsbereich

Für a > 0 gibt es keine Definitionslücken, da dann wegen $x^2\geq 0$ der Nenner nie zu 0 werden kann.

Für a = 0 haben wir die Funktionsgleichung $f_0(x)=0$ mit der x-Achse als Graph.
Für x = 0 werden Zähler und Nenner zu 0 und wir haben eine Definitionslücke, die mit der Definitions $f(x)=0$ hebbar ist.

Für a < 0 wird der Nenner zu 0, wenn $x^2=-a \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{-a}$. Wir haben dann 2 Pole mit Vorzeichenwechsel (VZW).

Nullstellen

$f(x)=0 \;\rightarrow\; 2ax=0 \;\rightarrow\; x=0$, falls $a\neq 0$ und $x\in\mathbb{R}$, falls $a=0$.

Stellen mit waagrechter Tangente

$f'(x)=0 \;\rightarrow\; 2a^2-2ax^2=0 \;\rightarrow\; a^2=ax^2 \;\rightarrow\; x\in\mathbb{R}$ für $a=0$

sonst: $a=x^2 \;\rightarrow\; x_{1,2}=\pm\sqrt{a}$ für $a>0$. Für $a<0$ gibt es keine waagrechten Tangenten.

Überprüfung der waagrechten Tangenten mit der 2. Ableitung:

$$f''(\pm\sqrt{a})=4a\cdot\frac{\pm a\cdot\sqrt{a}\mp 3a\cdot\sqrt{a}}{(a+a)^3}=4a\cdot\frac{\mp 2a\cdot\sqrt{a}}{8a^3}=\mp\frac{\sqrt{a}}{a}=\mp\frac{1}{\sqrt{a}}$$

Maximum für $x=+\sqrt{a}$ und Minimum für $x=-\sqrt{a}$

Wendepunkte

$f''(x)=0 \;\rightarrow\; 4a\cdot(x^3-3ax)=0 \;\rightarrow\; x\in\mathbb{R}$ für $a=0$

sonst: $x^3=3ax \;\rightarrow\; x_1=0$ für alle a und $x^2=3a \;\rightarrow\; x_{2,3}=\pm\sqrt{3a}$ für $a>0$

Art der Wendepunkte:

$f'''(0)=-12a\cdot\frac{a^2}{a^4}=-\frac{12}{a}<0$ links nach rechts für $a>0$ und rechts nach links für $a<0$

für $a=0$ ist $f(0)$ nicht definiert (s.o.)

$f'''(\pm\sqrt{3a})=-12a\cdot\frac{9a^2-18a^2+a^2}{(a+3a)^4}=\frac{96a^3}{256a^4}=\frac{96}{256a}>0$, also rechts nach links

---

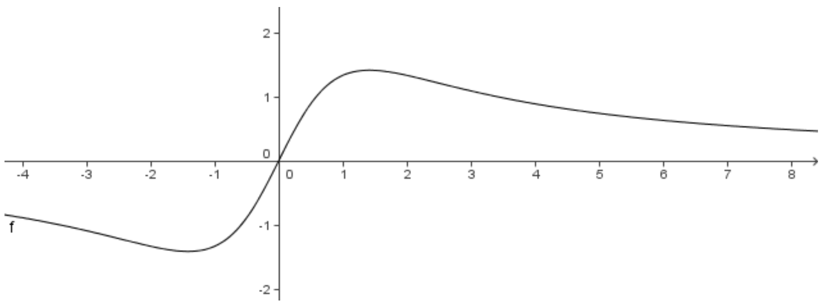
Verhalten für x→∞

Da der Grad des Nenners größer ist als der Grad des Zählers, ist die x-Achse eine waagrechte Asymptote.

Graphen

Aus den Rechnungen ergeben sich 3 verschiedene Kurvenarten:

1. a = 0 : Der Graph besteht aus den Punkten der x-Achse
2. a > 0 : Beispiel a = 2



3. a < 0 : Beispiel a = -0,5