

Kettenregel der Differentialrechnung

Gegeben ist die Funktion f , deren Funktionsterm sich aus der Verschachtelung zweier von x abhängiger Funktionen u und v zusammensetzt: $f(x) = u(v(x))$

Gesucht ist die Ableitung dieser Funktion.

Definition der Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{1} \cdot \frac{1}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(v(x)) - u(v(x_0))}{v(x) - v(x_0)} \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} = \text{setze nun im linken Bruch } v(x) = v \text{ und } v(x_0) = v_0 :$$

$$\lim_{\substack{v \rightarrow v_0 \\ x \rightarrow x_0}} \left(\frac{u(v) - u(v_0)}{v - v_0} \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{u(v) - u(v_0)}{v - v_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} = u'(v_0) \cdot v'(x_0)$$

Beachten Sie das „Prinzip der hilfreichen Eins“ in der zweiten Zeile der Herleitung (in roter Schrift):

Obwohl der rot geschriebene Teil des Terms insgesamt den Wert 1 hat, kann man ihn durch Trennen und unterschiedliche Zuordnung nutzen, um das Ergebnis zu erhalten.

Beispiel:

$$f(x) = \sin \sqrt{x} \quad u(x) = \sin x \quad u'(x) = \cos x \quad v(x) = \sqrt{x} \quad v'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = u'(v) \cdot v'(x) = \cos v \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$