# Kettenregel der Differentialrechnung

Gegeben ist die Funktion f , deren Funktionsterm sich aus der Verschachtelung zweier von x abhängiger Funktionen u und v zusammensetzt: $f(x)=u(v(x))$
Gesucht ist die Ableitung dieser Funktion.

Definition der Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0$ : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{u(v(x))-u(v(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(v(x))-u(v(x_0))}{1}\cdot\frac{1}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(v(x))-u(v(x_0))}{v(x)-v(x_0)}\cdot\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}=$$ setze nun im linken Bruch $v(x)=v$ und $v(x_0)=v_0$ :

$$\lim_{\substack{v\to v_0\\ x\to x_0}}\left(\frac{u(v)-u(v_0)}{v-v_0}\cdot\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right)=\lim_{v\to v_0}\frac{u(v)-u(v_0)}{v-v_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}=u'(v_0)\cdot v'(x_0)$$

Beachten Sie das „Prinzip der hilfreichen Eins“ in der zweiten Zeile der Herleitung (in roter Schrift):
Obwohl der rot geschriebene Teil des Terms insgesamt den Wert 1 hat, kann man ihn durch Trennen und unterschiedliche Zuordnung nutzen, um das Ergebnis zu erhalten.

Beispiel:

$f(x)=\sin\sqrt{x}$ $\quad u(x)=\sin x$ $\quad u'(x)=\cos x$ $\quad v(x)=\sqrt{x}$ $\quad v'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

$$f'(x)=u'(v)\cdot v'(x)=\cos v\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}=\cos(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$