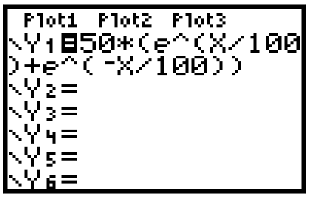
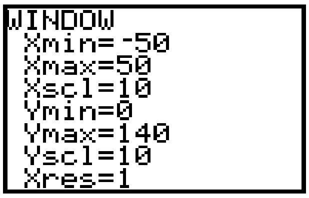
Übungsaufgaben zu den Themen „Kettenlinie“ - „Bogenlänge“ - „Näherungskurve“

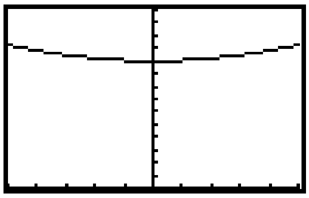
Das durchhängende Kabel einer Hochspannungsleitung besitzt zwischen zwei im Abstand 80m stehenden Masten die Form einer Kettenlinie mit der Gleichung $f(x)=50\cdot\left(e^{\frac{x}{100}}+e^{-\frac{x}{100}}\right)$ (x in Meter).

a) *Skizzieren Sie die Kettenlinie und berechnen Sie, um wieviel das Kabel im Vergleich zur Aufhängung durchhängt.*

Da die Kettenlinie achsensymmetrisch zur Senkrechten durch ihren Tiefpunkt liegt, wird sie symmetrisch zur y-Achse zwischen x=-40 bis x=40 abgetragen.







Der tiefste Punkt befindet sich bei x=0, der höchste Punkt bei x=-40 bzw. x=+40.

$f(0)=50\cdot\left(e^0+e^0\right)=50\cdot 2=100$ $\qquad$ $f(40)=f(-40)=50\cdot\left(e^{\frac{2}{5}}+e^{-\frac{2}{5}}\right)\approx 108{,}1$

Das Kabel hängt also $(108{,}1-100{,}0)m=8{,}1m$ durch.

b) *Berechnen Sie die Länge des Kabels zwischen den Aufhängepunkten.*

Die Bogenlänge L berechnet sich aus $L=\int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$.

$$f'(x)=50\cdot\left(\frac{1}{100}\cdot e^{\frac{x}{100}}-\frac{1}{100}\cdot e^{-\frac{x}{100}}\right)=\frac{e^{\frac{x}{100}}-e^{-\frac{x}{100}}}{2}=\frac{e^{\frac{x}{100}}-\frac{1}{e^{\frac{x}{100}}}}{2}=\frac{e^{\frac{2x}{100}}-1}{2\cdot e^{\frac{x}{100}}} \rightarrow$$

$$1+\left(f'(x)\right)^2=1+\frac{\left(e^{\frac{2x}{100}}-1\right)^2}{4\cdot e^{\frac{2x}{100}}}=\frac{4\cdot e^{\frac{2x}{100}}+e^{\frac{4x}{100}}-2\cdot e^{\frac{2x}{100}}+1}{4\cdot e^{\frac{2x}{100}}}=\frac{e^{\frac{4x}{100}}+2\cdot e^{\frac{2x}{100}}+1}{4\cdot e^{\frac{2x}{100}}}=\frac{\left(e^{\frac{2x}{100}}+1\right)^2}{4\cdot e^{\frac{2x}{100}}} \rightarrow$$

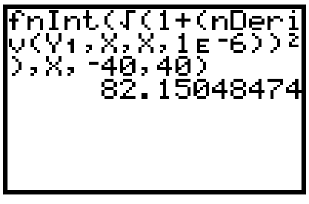
$$\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{\frac{\left(e^{\frac{2x}{100}}+1\right)^2}{4\cdot e^{\frac{2x}{100}}}}=\frac{\left(e^{\frac{2x}{100}}+1\right)}{2\cdot e^{\frac{x}{100}}}=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{x}{100}}+e^{-\frac{x}{100}}\right) \rightarrow$$

$$L=\int\limits_{-40}^{40}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx \overset{\text{Symmetrie}}{=} 2\cdot\int\limits_0^{40}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx=2\cdot\int\limits_0^{40}\frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{x}{100}}+e^{-\frac{x}{100}}\right)dx=\int\limits_0^{40}\left(e^{\frac{x}{100}}+e^{-\frac{x}{100}}\right)dx=$$

$$\left[100\cdot e^{\frac{x}{100}}-100\cdot e^{-\frac{x}{100}}\right]_0^{40}=\left(100\cdot e^{\frac{2}{5}}-100\cdot e^{-\frac{2}{5}}\right)-\left(100\cdot e^0-100\cdot e^0\right)=100\cdot\left(e^{\frac{2}{5}}-e^{-\frac{2}{5}}\right)\approx 82{,}15$$

Das Kabel hat zwischen den Aufhängepunkten also eine Länge von etwa 82,15m.

Alternativ kann das Integral auch mit dem Taschenrechner bestimmt werden:



c) Statt einer Kettenlinie soll zur Beschreibung des durchhängenden Kabels eine Parabelgleichung (Grad 2) benutzt werden. Die beiden Aufhängepunkte und der tiefste Punkt der Kurve sollen mit der Kettenlinie übereinstimmen.

Wegen der Achsensymmetrie ist die Parabelgleichung von der Art $y=a\cdot x^2+c$.

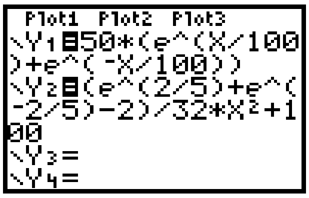
Die Punkte (0/100) und $\left(40/50\cdot(e^{\frac{2}{5}}+e^{-\frac{2}{5}})\right)$ sind vorgegeben.

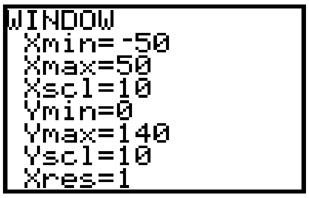
Aus (0/100) folgt $100=a\cdot 0+c \;\rightarrow\; c=100$.

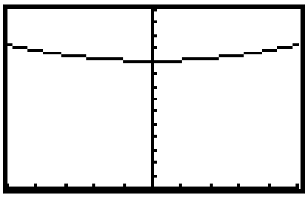
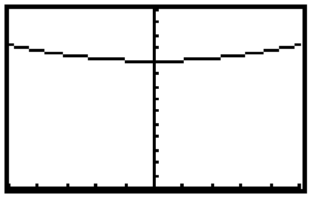
Aus $\left(40/50\cdot\left(e^{\frac{2}{5}}+e^{-\frac{2}{5}}\right)\right)$ folgt

$$50\cdot\left(e^{\frac{2}{5}}+e^{-\frac{2}{5}}\right)=a\cdot 40^2+100 \;\rightarrow\; 1600\cdot a=50\cdot\left(e^{\frac{2}{5}}+e^{-\frac{2}{5}}\right)-100 \;\rightarrow\; a=\frac{50\cdot\left(e^{\frac{2}{5}}+e^{-\frac{2}{5}}\right)-100}{1600}=\frac{e^{\frac{2}{5}}+e^{-\frac{2}{5}}-2}{32}$$

Die gesuchte Parabelgleichung ist also $g(x)=\frac{e^{\frac{2}{5}}+e^{-\frac{2}{5}}-2}{32}\cdot x^2+100$.





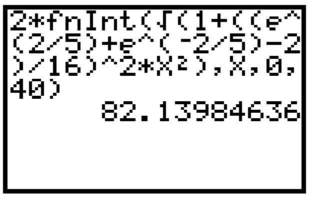



Der Graph links gehört zur Funktion g(x), rechts sind f(x) und g(x) gemeinsam abgebildet. Man erkennt nur einen Graph. Die Parabel kann also gut als Näherung für die Kettenlinie genutzt werden.

d) Es soll beechnet werden, wie lang das Kabel ist, wenn die Parabelgleichung für die Beschreibung der Kabelkrümmung zu Grunde gelegt wird.

Mit $g'(x)=\frac{e^{\frac{2}{5}}+e^{-\frac{2}{5}}-2}{16}\cdot x$ folgt $L_{Parabel}=2\cdot\int_0^{40}\sqrt{1+\left(\frac{e^{\frac{2}{5}}+e^{-\frac{2}{5}}-2}{16}\right)^2\cdot x^2}\,dx$.

Der Taschenrechner gibt folgende Lösung:



Die Länge ist also geringfügig kleiner als bei der Kettenlinie.

e) Für welchen x-Wert ist der Höhenunterschied zwischen Kettenlinie und Parabel maximal?

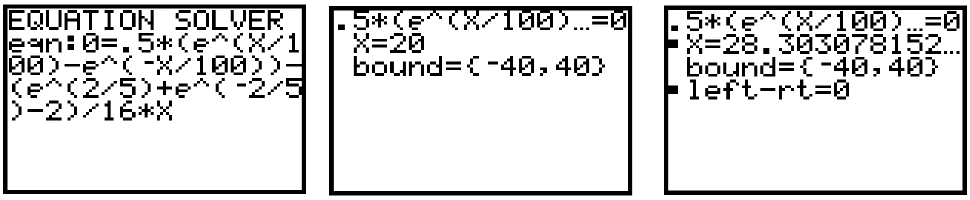
Der Höhenunterschied wird durch die Funktion

$$h(x)=f(x)-g(x)=50\cdot\left(e^{\frac{x}{100}}+e^{-\frac{x}{100}}\right)-\frac{e^{\frac{2}{5}}+e^{-\frac{2}{5}}-2}{32}\cdot x^2-100$$

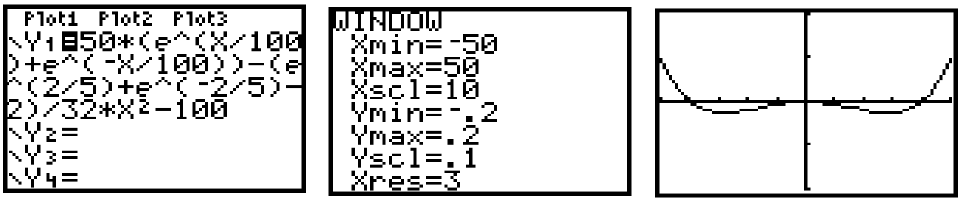
gegeben. Das Maximum dieser Funktion liefert den gesuchten x-Wert.

$$h'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{x}{100}}-e^{-\frac{x}{100}}\right)-\left(e^{\frac{x}{100}}+e^{-\frac{x}{100}}\right)-\frac{e^{\frac{2}{5}}+e^{-\frac{2}{5}}-2}{16}\cdot x\overset{!}{=}0$$

Der Taschenrechner zeigt mit dem Solver-Befehl als Lösung etwa x=28,3 an:



Der Graph von $h(x)=f(x)-g(x)$ zeigt, dass für x-Werte zwischen -40 und +40 die Parabel größere Funktionswerte hat.

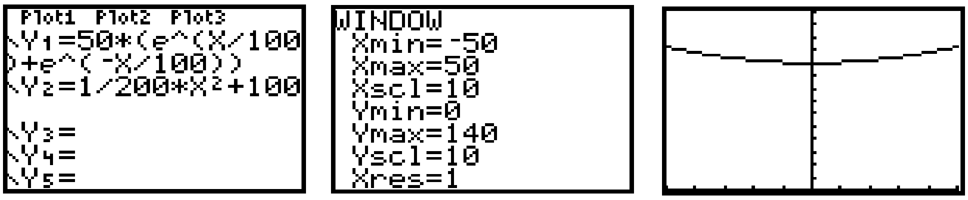


Anmerkung

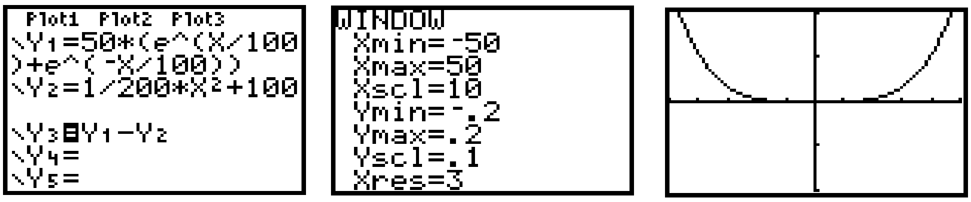
Bei der Lösung der Aufgaben ist sehr wichtig, nicht mit gerundeten Werten weiterzurechnen.

Setzt man $g(x)=\frac{e^{\frac{2}{5}}+e^{-\frac{2}{5}}-2}{32}\cdot x^2+100\approx 0{,}005067023\cdot x^2+100\approx 0{,}005\cdot x^2+100=\frac{1}{200}\cdot x^2+100$ und rechnet mit dieser Näherung, so erhält man ein vollkommen anderes Ergebnis.

Zwar zeigt die Überlagerung der beiden Kurven bei c) keinen Unterschied:



Der Graph von $h(x)=f(x)-g(x)$ zeigt aber, dass nun für x-Werte zwischen -40 und +40 und auch global die Parabel die kleineren Funktionswerte hat:



Der größte Abstand zwischen den Funktionswerten der beiden Kurven liegt hier am Rand des betrachteten Intervalls, also bei -40 bzw. +40.