

Näherung für π durch das Werfen von Münzen

[Simulation](#) und Herleitung für die Formel

mit Exkursen u. a. in die Stochastik und die Integralrechnung

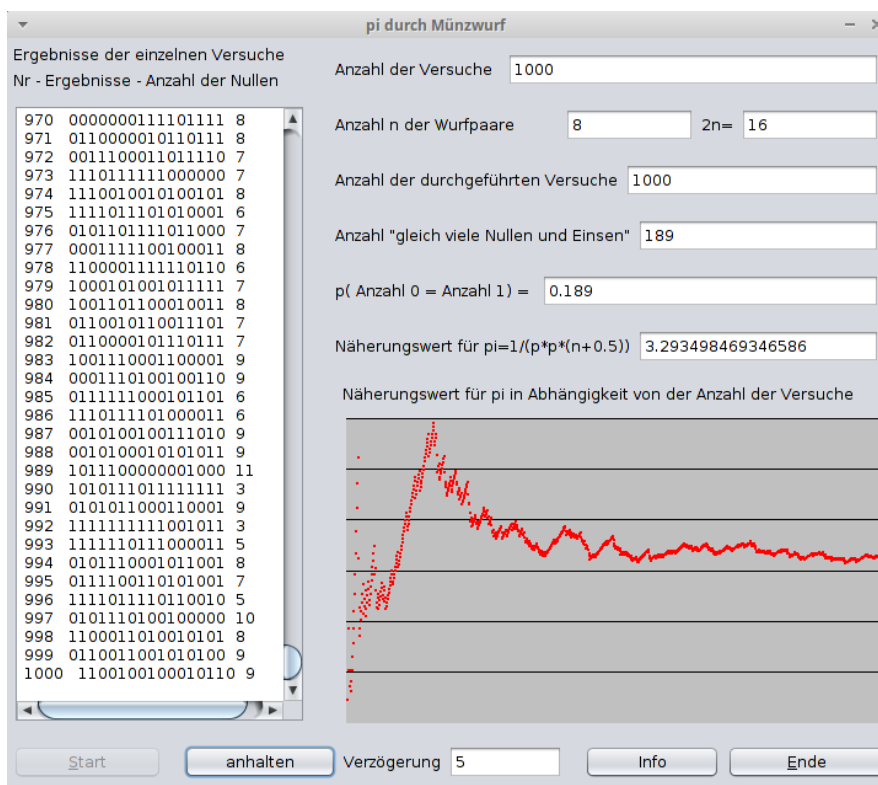
Wirft man geradzahlig oft (also $2n$ -mal mit $n \in \mathbb{N}$) eine Münze, so ist für $n \rightarrow \infty$ die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass jede Seite der Münze gleich oft vorkommt,

$$p = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)}}. \text{ Daraus folgt } \pi = \frac{1}{p^2 \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)} \text{ oder für große } n \text{ einfacher } \pi \approx \frac{1}{p^2 \cdot n}.$$

Der entsprechende Versuch wird mit folgendem [Programm](#) simuliert.

Man sieht deutlich, dass das Verfahren nicht gut konvergiert, wenn man n zu klein wählt.

Für genauere Ergebnisse muss auch die Anzahl der Versuche stark erhöht werden.



Die Herleitung der Näherungsformel ist für Schüler nicht ganz einfach.

Die folgende Darstellung ist vollständig auf Schulniveau (Sek. II) durchgerechnet und zeigt interessante Rechenverfahren auf, die teilweise in den aktuellen Lehrplänen nicht mehr vorkommen.

1. Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei $2n$ Würfeln beide Seiten einer Münze gleich häufig auftreten

Bei jedem Wurf einer Münze ergeben sich die 2 Ereignisse Kopf (0) oder Zahl (1).

Bei zwei Würfeln gibt es 4 Ereignisse: 00, 01, 10, 11

Mit jeder geworfenen Münze verdoppelt sich die Anzahl der möglichen Ereignisse.

Bei $2n$ Würfeln sind es also 2^{2n} Ereignisse.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis beim $2n$ -fachen Wurf beträgt dann also $\frac{1}{2^{2n}}$.

Bei wie vielen dieser Ergebnisse kommen denn aber n -mal 0 und n -mal 1 vor?

Es liegt hier ein Ziehen ohne Zurücklegen vor, bei dem die Reihenfolge keine Rolle spielt.

Wenn man n Nullen aus $2n$ Nullen zieht, so hat man für die erste Null $2n$ Möglichkeiten, für die zweite Null noch $2n-1$ Möglichkeiten usw. bis zu $2n-(n-1)$ Möglichkeiten für die n -te Null.

Die Anzahl aller Möglichkeiten ergibt sich durch Multiplikation dieser Werte:

$$2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot (2n-(n-1))$$

Mit der Fakultätsschreibweise $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ schreibt man einfacher

$$2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot (2n-(n-1)) \cdot \frac{(2n-n) \cdot (2n-(n+1)) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(2n-n) \cdot (2n-(n+1)) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!}$$

Da es auf die Reihenfolge nicht ankommt, muss man das Ergebnis noch durch die Anzahl dividieren, die die Anordnungsmöglichkeiten der n Nullen angibt:

Für die erste Null hat man n Möglichkeiten, für die zweite Null sind es $(n-1)$ Möglichkeiten usw. bis zu 1 Möglichkeit für die n -te Null. Wieder ergibt die Multiplikation der Werte die Anzahl aller Anordnungsmöglichkeiten: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Die gesuchte Zahl der Möglichkeiten (n -mal Null, n -mal Eins) ist also $\frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$.

Zieht man allgemein aus n Kugeln k Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, so ist die Zahl der Möglichkeiten $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$ mit dem Binom $\binom{n}{k}$ als abkürzende Schreibweise.

Also kann man hier auch schreiben $\frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{(2n)!}{n! \cdot (2n-n)!} = \binom{2n}{n}$

Die Wahrscheinlichkeit für n -mal Null und n -mal Eins beim $2n$ -fachen Münzwurf ergibt sich

$$\text{dann zu } p = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

2. Andere Schreibweise für p Beweis durch vollständige Induktion

$$\text{Es gilt } p = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot 2n}$$

Beim Beweisverfahren der vollständigen Induktion zeigt man zunächst, dass für irgendein n die Formel gilt. Am besten nimmt man dazu das kleinstmögliche n , hier also $n=1$.

Dann zeigt man, dass bei Gültigkeit der Formel für $n=k$ die Formel auch für $n=k+1$ gilt.

Dann gilt (Dominoeffekt), dass die Formel nicht nur für $n=1$, sondern auch für $n=2$ und dann auch für $n=3$ usw. gilt, also für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

$$n=1: \text{ links steht dann } \frac{\binom{2}{1}}{2^{2 \cdot 1}} = \frac{2!}{1! \cdot (2-1)!} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{rechts steht nur } \frac{1}{2}, \text{ da für } n=1 \text{ gilt } \frac{(2n-1)}{2n} = \frac{(2-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

nicht notwendig, aber zur Anschaulichkeit auch noch folgender Fall:

$$n=2: \text{ links steht } \frac{\binom{4}{2}}{2^{2 \cdot 2}} = \frac{4!}{4! \cdot (4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{24}{16} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{rechts steht } \frac{1 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot \dots \cdot 2n} = \frac{1 \cdot \dots \cdot (2 \cdot 2 - 1)}{2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1 \cdot \dots \cdot 3}{2 \cdot \dots \cdot 4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$$

$$\text{Nun soll für } n=k \text{ gelten } \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-3) \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k-2) \cdot 2k}$$

Es muss nun gezeigt werden, dass dann die Formel auch für $n=k+1$ gilt, dass also

$$\frac{\binom{2(k+1)}{k+1}}{2^{2(k+1)}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2(k+1)-3) \cdot (2(k+1)-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2(k+1)-2) \cdot 2(k+1)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k) \cdot (2k+2)}$$

$$\text{linke Seite: } \frac{\binom{2(k+1)}{k+1}}{2^{2(k+1)}} = \frac{\binom{2k+2}{k+1}}{2^{2k+2}} = \frac{(2k+2)!}{(k+1)! \cdot (2k+2-(k+1))!} = \frac{(2k+2)!}{(k+1)! \cdot (k+1)!} =$$

$$\frac{(2k)! \cdot (2k+1) \cdot (2k+2)}{k! \cdot k! \cdot (k+1) \cdot (k+1)} = \frac{(2k)!}{k! \cdot k!} \cdot \frac{(2k+1) \cdot (2k+2)}{(k+1) \cdot (k+1)} = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \cdot \frac{(2k+1) \cdot 2 \cdot (k+1)}{(k+1) \cdot (k+1)} = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \cdot \frac{(2k+1) \cdot 2}{k+1}$$

$$\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \cdot \frac{2k+1}{k+1} = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \stackrel{\text{einsetzen}}{=} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-3) \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k-2) \cdot 2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \text{ gleich rechte Seite.}$$

3. Der Zusammenhang zwischen dem Wallisschen Produkt und der gefundenen Wahrscheinlichkeit

Das Wallissche Produkt ist gegeben durch $\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2 \cdot (2n+1)^2}$.

Mit $p = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot 2n}$ folgt $p^2 = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2n-3)^2 \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}$ und weiter

$$\frac{1}{p^2} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2n-3)^2 \cdot (2n-1)^2} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2n-3)^2 \cdot (2n-1)^2} \cdot \frac{2n+1}{2n+1}$$

Für großes n ergibt sich näherungsweise

$$\frac{1}{p^2} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2n-3)^2 \cdot (2n-1)^2} \cdot \frac{2n+1}{2n+1} \stackrel{\text{Wallissches Produkt}}{\approx} \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1)$$

Durch Umstellen folgt $\frac{1}{p^2} \approx \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1) = \pi \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \rightarrow \pi \approx \frac{1}{p^2 \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)} \approx \frac{1}{p^2 \cdot n}$ für großes n.

Mit Hilfe der Formel $\pi = \frac{1}{p^2 \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)}$ wurde die Simulation (Java-Programm) programmiert.

4. Herleitung des Wallisschen Produktes mit Hilfe partieller Integration

Aus der Produktregel $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ oder kurz $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

ergibt sich durch Integration $\int_{x_0}^{x_1} (u \cdot v)' dx = \int_{x_0}^{x_1} u' \cdot v dx + \int_{x_0}^{x_1} u \cdot v' dx$.

Da sich Differentiation und anschließende Integration gegenseitig aufheben, steht auf der

linken Seite $\int_{x_0}^{x_1} (u \cdot v)' dx = [u \cdot v]_{x_0}^{x_1}$.

Durch Umformen ergeben sich die beiden folgenden Formeln:

$$[u \cdot v]_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} u' \cdot v dx + \int_{x_0}^{x_1} u \cdot v' dx \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} u' \cdot v dx = [u \cdot v]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} u \cdot v' dx ; \int_{x_0}^{x_1} u \cdot v' dx = [u \cdot v]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} u' \cdot v dx$$

Mit Hilfe der rechten Formel soll nun das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ berechnet werden.

Man setzt $u(x) = \sin^{n-1} x$; $v'(x) = \sin x$.

Dann folgt (Potenzregel und Kettenregel) $u'(x) = (n-1) \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos x$ und $v(x) = -\cos x$.

Also gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^{n-1} x}_u \cdot \underbrace{\sin x}_{v'} \, dx = \left[\underbrace{\sin^{n-1} x}_u \cdot \underbrace{(-\cos x)}_v \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((n-1) \cdot \underbrace{\sin^{n-2} x}_{u'} \cdot \underbrace{\cos x}_v \right) \cdot \underbrace{(-\cos x)}_v \, dx$$

Nebenrechnungen:

integralfreier Summand:

$$\left[\underbrace{\sin^{n-1} x}_u \cdot \underbrace{(-\cos x)}_v \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\sin^{n-1} \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{2} \right) \right) - \left(\sin^{n-1} 0 \cdot (-\cos 0) \right) = (1 \cdot 0) - 0 \cdot (-1) = 0$$

rechtes Integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((n-1) \cdot \underbrace{\sin^{n-2} x}_{u'} \cdot \underbrace{\cos x}_v \right) \cdot \underbrace{(-\cos x)}_v \, dx = (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \underbrace{(-\cos^2 x)}_{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \, dx$$

$$(n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot (\sin^2 x - 1) \, dx = (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n x - \sin^{n-2} x) \, dx = (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx - (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx$$

Damit folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = -(n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx + (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx \quad \text{Addition des linken Summanden auf der rechten Seite} \rightarrow$$

$$n \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx \quad \rightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx$$

Das Ergebnis ist eine Rekursionsformel: das linke Integral wird vereinfacht, indem der Exponent im rechten Integral um 2 verringert wird. Durch wiederholtes Anwenden der Formel kann so das linke Integral gelöst werden.

Beispiel für n=6:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \, dx = \frac{5}{6} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{32} \cdot \pi$$

Beispiel für n=5:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx = \frac{4}{5} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot (0+1) = \frac{8}{15}$$

Man kann schon an diesen Beispielen sehen, dass bei einem geraden Exponenten von sin x bei den Brüchen die ungeraden Zahlen im Zähler und die geraden Zahlen im Nenner stehen. Außerdem wird der Faktor π angehängt.

Für ungeraden Exponenten sind dagegen die geraden Zahlen im Zähler und die ungeraden Zahlen im Nenner. Ein Faktor π fehlt hier.

Im Folgenden werden die Integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx$ und $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx$ verglichen.

Da für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ die sin-Werte kleiner als 1 sind, gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx$.

Allgemein gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{(2n) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{(2n) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1} \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx = \frac{(2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}$$

Aus der oben genannten Ungleichungskette folgt (Division durch den linken Term)

$$\frac{(2n) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1} \leq \frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{(2n) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1} \rightarrow$$

$$1 \leq \frac{(2n+1) \cdot (2n-1)^2 \cdot (2n-3)^2 \cdot \dots \cdot 3^2 \cdot 1^2}{(2n)^2 \cdot (2n-2)^2 \cdot \dots \cdot 4^2 \cdot 2^2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \quad \xrightarrow{\text{Grenzwert für } n \rightarrow \infty}$$

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n+1) \cdot (2n-1)^2 \cdot (2n-3)^2 \cdot \dots \cdot 3^2 \cdot 1^2}{(2n)^2 \cdot (2n-2)^2 \cdot \dots \cdot 4^2 \cdot 2^2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right) = 1$$

Daraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n+1) \cdot (2n-1)^2 \cdot (2n-3)^2 \cdot \dots \cdot 3^2 \cdot 1^2}{(2n)^2 \cdot (2n-2)^2 \cdot \dots \cdot 4^2 \cdot 2^2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = 1$

oder $\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)^2 \cdot (2n-2)^2 \cdot \dots \cdot 4^2 \cdot 2^2}{(2n+1) \cdot (2n-1)^2 \cdot (2n-3)^2 \cdot \dots \cdot 3^2 \cdot 1^2} \right)$ (Wallissches Produkt).

Man beachte, dass der Faktor $(2n+1)$ nicht quadriert wird!

5. Schlussbemerkung

Das Gleichheitszeichen im Wallisschen Produkt gilt nur, wenn der Grenzwert des Bruchs bestimmt wird.

Beim oben beschriebenen Zufallsversuch ist man natürlich gezwungen, den Wert für n relativ klein zu halten. Das Gesetz der großen Zahl ist hier deshalb nicht anwendbar, d. h. auch eine sehr große Anzahl an durchgeführten Würfelerggebnissen wird nicht eine beliebig genau Annäherung an den richtigen π -Wert ergeben.

Die Simulation erlaubt viele Versuche bei großem n durchzuführen. Aber auch dabei wird aus dem Graphen deutlich, dass dieses Verfahren zur Bestimmung der Nachkommastellen von π nicht sinnvoll ist.

Bestimmt man mit Hilfe einer Tabellenkalkulation auf Grund der Formel $\pi = \frac{1}{p^2 \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)}$

die π -Werte für wachsendes n (beim Bruch wird bis zum n -ten Faktor im Zähler und Nenner multipliziert), so sieht man leicht, dass die Werte sich von unten an π annähern.

Erst für $n \approx 500$ ergeben sich die ersten 2 Nachkommastellen richtig (3,14).