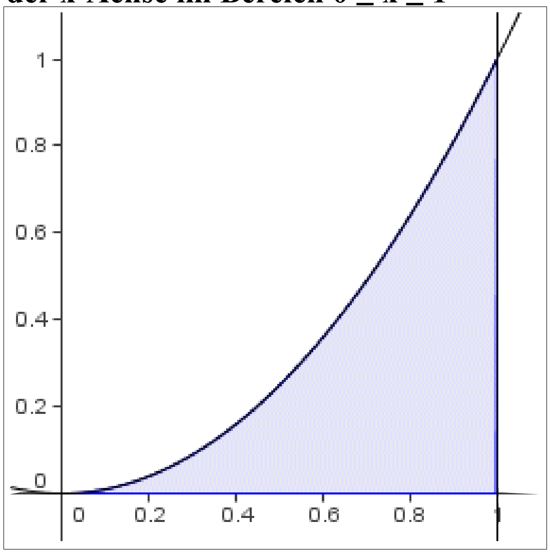
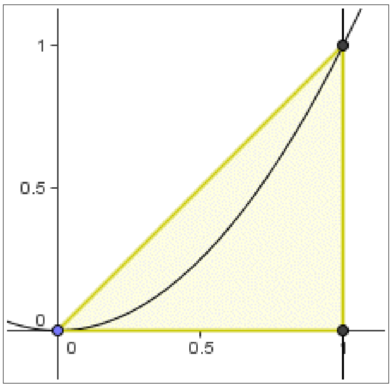
Die Berechnung des Flächeninhalts krummlinig begrenzter Flächen

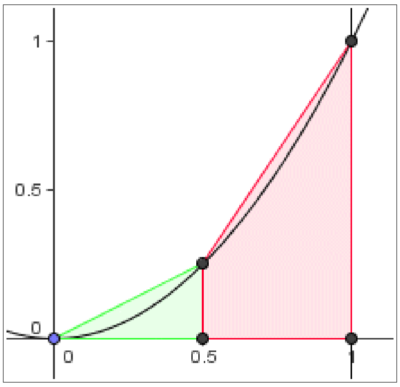
Einführung in die Integralrechnung

Teil 1: Die Fläche zwischen der Normalparabel $y = x^2$ und der x-Achse im Bereich $0 \leq x \leq 1$



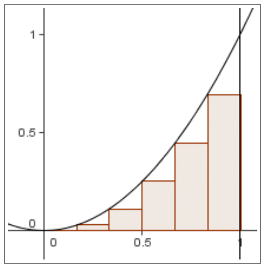
Die Fläche sieht aus wie ein Dreieck, bei dem die eine Seite etwas verbogen ist. Näherungsweise könnte man die Fläche also durch ein Dreieck oder z. B. durch ein Dreieck und ein Trapez annähern:

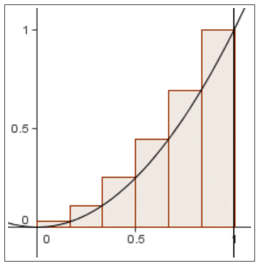




Da bei einer Flächenberechnung mit diesen Abschätzungen nur schwer erkannt werden kann, wie dicht man mit der Schätzung am „wahren" Wert ist, benutzen wir ein Verfahren, das auf den ersten Blick ungenauer aussieht, uns aber leichter und übersichtlicher ans Ziel führen wird.

Die Idee ist, die Fläche durch Rechtecke anzunähern, deren Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Alle Rechtecke sollen die gleiche Breite haben.

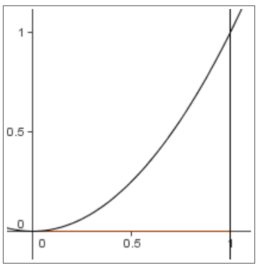


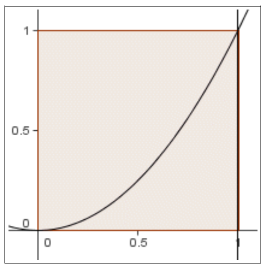


Man kann nun die Fläche **nach unten abschätzen**[1], indem man solche Rechtecke wählt, die vollständig unter der Kurve liegen, dabei aber größtmögliche Höhe haben. Die Kurve verläuft dann durch den oberen linken Eckpunkt der Rechtecke (siehe linkes Bild). Die Summe aller dieser Rechtecksflächeninhalte nennt man **Unter**summe.

Nach oben[2] schätzt man die Fläche ab, indem die Rechtecke die Kurve im entsprechenden Abschnitt vollständig enthalten, aber kleinstmögliche Höhe haben. Die Kurve verläuft dabei durch den oberen rechten Eckpunkt der Rechtecke (siehe rechtes Bild). Die Summe aller dieser Rechtecksflächeninhalte nennt man **Ober**summe.

Bevor wir den allgemeinen Fall behandeln, bei dem wir eine beliebige Anzahl von Rechtecken zulassen, fangen wir mit 1 Rechteck unterhalb und 1 Rechteck oberhalb an und teilen dann in weiteren Rechenschritten alle Intervalle in 2 gleich große Intervalle:





Breite der Rechtecke ist 1:

Untersumme: Breite ist 1 und Höhe ist 0, Flächeninhalt also 0

Obersumme: Breite ist 1 und Höhe ist 1, Flächeninhalt also 1

Erste Abschätzung zum gesuchten Flächeninhalt A:

$$0 < A < 1$$

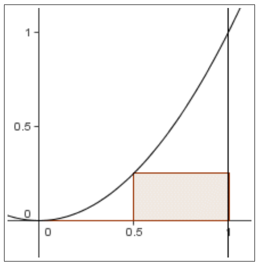
Der Bereich, in dem der wahre Flächeninhalt zu suchen ist, beträgt noch 1. Wir werden sehen, dass dieser Bereich bei den folgenden Rechnungen immer enger werden wird.

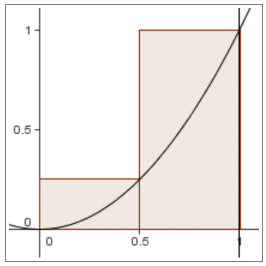
---

1 „nach unten abschätzen" bedeutet: der berechnete Flächeninhalt ist mit Sicherheit kleiner oder höchstens gleich zum wahren Flächeninhalt

2 „nach oben abschätzen" bedeutet: der berechnete Flächeninhalt ist mit Sicherheit größer oder höchstens gleich zum wahren Flächeninhalt

Breite der Rechtecke ist $\frac{1}{2}$:





Untersumme (linkes Bild):

Die Höhen der Rechtecke ergeben sich aus dem Funktionswert zum x-Wert an der **linken** Rechteckseite, also hier ist wegen $y=x^2$ der Funktionswert immer gleich x^2.

$$0\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{0}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

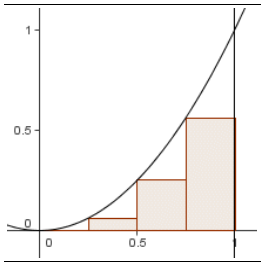
Obersumme (rechtes Bild):

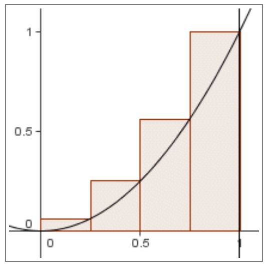
Die Höhen der Rechtecke ergeben sich aus dem Funktionswert zum x-Wert an der **rechten** Rechteckseite, also hier ist wegen $y=x^2$ der Funktionswert immer gleich x^2.

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{4}{8}=\frac{5}{8}$$

Der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme beträgt $\frac{5}{8}-\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Breite der Rechtecke ist $\frac{1}{4}$:





Untersumme (linkes Bild):

$$\frac{0}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{0+1+4+9}{64}=\frac{14}{64}$$

Obersumme (rechtes Bild):

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4}+\frac{16}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1+4+9+16}{64}=\frac{30}{64}$$

Der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme beträgt $\frac{30}{64}-\frac{14}{64}=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$.

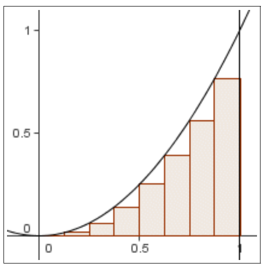
Man sieht: Ober- und Untersumme sind fast gleich, lediglich ein Summand ist jeweils verschieden, bei der Untersumme der erste Summand und bei der Obersumme der letzte Summand.

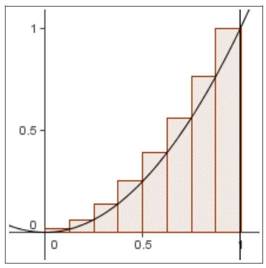
Der Wert des letzten Summanden ist gleichzeitig der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme. Da dieser letzte Summand sich immer aus „1 mal Breite des Rechtecks“ ergibt, wird der Unterschied bei jeder Intervallhalbierung auch halbiert, geht also mit jeder Halbierung weiter gegen 0.

Der Zähler im Gesamtbruch für die Ober- und Untersummen besteht aus den ersten Quadratzahlen (wegen $y=x^2$) und der Nenner vergrößert sich bei jeder Intervall-Halbierung um das 8-fache ($=2^3$).

Mit diesen Erkenntnissen kann man die Summen für die nächste Halbierung viel schneller bilden:

Breite der Rechtecke ist $\frac{1}{8}$:





Untersumme (linkes Bild):

$$\frac{0+1+4+9+16+25+36+49}{512}=\frac{140}{512}\approx 0{,}273$$

Obersumme (rechtes Bild):

$$\frac{1+4+9+16+25+36+49+64}{512}=\frac{204}{512}\approx 0{,}398$$

Der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme beträgt $\frac{204}{512}-\frac{140}{512}=\frac{64}{512}=\frac{1}{8}$

Der Flächeninhalt liegt also zwischen 0,273 und 0,398. Rechnet man auf diese Art weiter, dauert es sehr lange, bis man zu wesentlich genaueren Ergebnissen kommt. Deshalb geht es jetzt mit allgemeiner Rechnung weiter.

Breite der Rechtecke ist $\frac{1}{n}$:

Untersumme:

$$\left(\frac{0}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{3}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}$$

Obersumme:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{3}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{n}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2}{n^3}$$

Der Unterschied zwischen Ober und Untersumme ist $\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}$

Aus der Formelsammlung übernehmen wir folgende Formel:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

Bei einem Leistungskurs würde sich hier sicher ein Exkurs über das Beweisen mit Hilfe vollständiger Induktion anschließen und anschließend könnte diese Formel bewiesen werden. Wir schieben hier nur eine „vertrauensbildende Maßnahme" ein, indem wir für n=1, n=2 und n=3 die Formel bestätigen (aber damit natürlich <u>nicht</u> beweisen):

$\sum_{i=1}^{1} i^2=1^2=1$ und $\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}=\frac{6}{6}=1$ haben dasselbe Ergebnis.

$\sum_{i=1}^{2} i^2=1^2+2^2=1+4=5$ und $\frac{2\cdot(2+1)\cdot(2\cdot2+1)}{6}=\frac{2\cdot3\cdot5}{6}=\frac{30}{6}=5$ haben dasselbe Ergebnis.

$\sum_{i=1}^{3} i^2=1^2+2^2+3^2=1+4+9=14$ und $\frac{3\cdot(3+1)\cdot(2\cdot3+1)}{6}=\frac{3\cdot4\cdot7}{6}=\frac{84}{6}=14$ haben dasselbe Ergebnis.

Da wir gezeigt haben, dass für n→∞ der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme zu 0 wird, reicht es, wenn wir mit der Obersumme weiter rechnen, um den Flächeninhalt zu bestimmen.

Einsetzen der Formel in unsere Rechnung:

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6\cdot n^3}=\frac{1}{6}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}=\frac{1}{6}\cdot1\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\cdot\frac{2+\frac{1}{n}}{1}=\frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Für n→∞ geht dieser Term gegen $\frac{1}{6}\cdot1\cdot2=\frac{1}{3}$.

Der Flächeninhalt der Fläche zwischen Normalparabel und der x-Achse im Bereich $x=0$ bis $x=1$ beträgt also $\frac{1}{3}$.

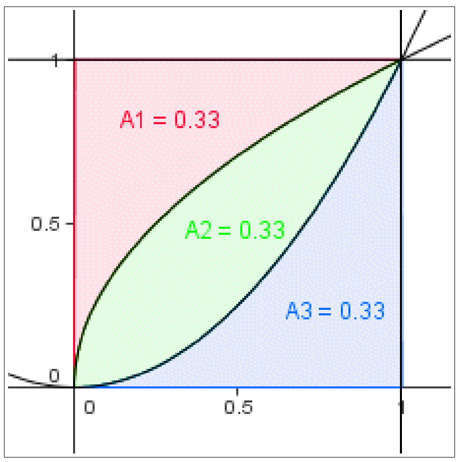
Anmerkung:

Spiegelt man die Normalparabel an der 1. Winkelhalbierenden, so ergibt sich im 1. Quadranten der Graph der Wurzelfunktion mit der Gleichung $y=\sqrt{x}$.

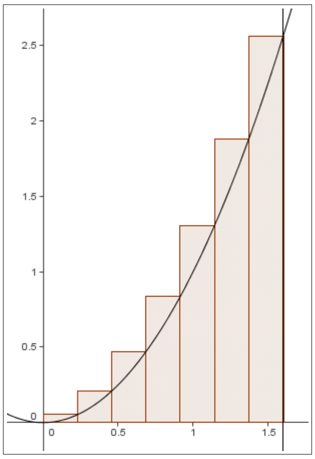
A3 ist der oben weiter berechnete Flächeninhalt.

A1 muss wegen der Spiegelung genau so groß sein.

Für A2 bleibt dann auch nur noch derselbe Flächeninhalt wie für A1 und A3 übrig, da das Quadrat den Flächeninhalt 1 hat und die beiden äußeren Flächenteile den Inhalt $\frac{1}{3}$ haben: $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.



Teil 2: Die Fläche zwischen der Normalparabel y = x^2 und der x-Achse im Bereich $0 \le x \le b$



Im Teil 1 haben wir die Fläche zwischen den x-Werten 0 und 1 berechnet.

Nimmt man statt des Wertes 1 als rechte Begrenzung der Fläche eine Variable b, so wird sich an der Berechnung nicht viel ändern:

Wir teilen den gesamten Bereich wieder in n Teile, die jetzt aber jeweils die Breite $\frac{b}{n}$ haben, weil die Breite des gesamten Intervalls ja b beträgt.

Die Höhen der Rechtecke bei der Obersumme berechnen sich nun also aus den Werten $\frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}$ usw.

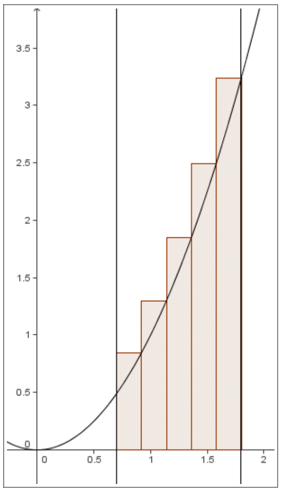
Statt wie auf Seite 3 $\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2}{n^3}$ zu schreiben, muss die Berechnung der Obersumme deshalb nun durch folgenden Term erfolgen:

$$\left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} + \left(\frac{2b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} + \left(\frac{3b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} + \ldots + \left(\frac{(n-1)\cdot b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} + \left(\frac{n\cdot b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} = \frac{\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2\right)\cdot b^3}{n^3}$$

Das Ergebnis ist also bis auf den Faktor b^3 das gleiche wie auf Seite 3.

Der Flächeninhalt A der gesuchten Fläche ist also $A = \frac{b^3}{3}$.

Teil 3: Die Fläche zwischen der Normalparabel y = x^2 und der x-Achse im Bereich $a \le x \le b$



Während Teil 1 noch 3 Seiten umfasst und das Ergebnis für eine einzige Fläche liefert, ist Teil 2 auf einer halben Seite untergebracht und liefert die Ergebnisse für unendlich viele Flächen.

Ein gutes Beispiel dafür, dass die Beschäftigung mit einer neuen Sache erst einmal viel Energie benötigt. Wenn man sich dann aber in die Materie eingearbeitet hat, gehen die nächsten Schritte viel einfacher.

Machen Sie sich das ruhig auch in anderen Zusammenhängen einmal klar ;-)

Für die Lösung dieses Problems kommen wir fast ohne Rechnung aus:

Zunächst berechnet man den Flächeninhalt der Fläche zwischen Normalparabel und x-Achse zwischen x=0 und x=b und zieht dann den Flächeninhalt der Fläche von x=0 bis x=a davon ab:

(Flächeninhalt von a bis b) =
(Flächeninhalt von 0 bis b) - (Flächeninhalt von 0 bis a)

Also gilt für den Flächeninhalt A: $A = \frac{b^3 - a^3}{3}$

Teil 4: Flächeninhaltsfunktion in Abhängigkeit von x

Berechnet man die Fläche von x=0 bis zu einem beliebigen und variablem x (man könnte für b einfach x setzen), so erhält man eine Flächeninhalts-Funktion A(x), die in Abhängigkeit von x den Wert von A angibt:

Bei der Normalparabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^2$ wird die Fläche zwischen Kurve und x-Achse in den Grenzen von x=0 bis x durch die Flächeninhaltsfunktion $A(x) = \frac{x^3}{3}$ beschrieben.

Auf den nächsten Seiten werden wir sehen, dass zwischen $f(x)$ und $A(x)$ ein interessanter Zusammenhang besteht.

Teil 5: Flächeninhaltsfunktion für Funktionen des Typs f(x)=x^k in Abhängigkeit von x

Gegenüber den Rechnungen in Teil 2 ändert sich der Exponent bei der Berechnung der Höhe der Rechtecke für die Ober- und Untersumme. Statt 2 müssen wir k setzen,

statt $\left(\frac{b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}+\left(\frac{2b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}+\left(\frac{3b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}+\ldots+\left(\frac{(n-1)\cdot b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}+\left(\frac{n\cdot b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n}=\frac{\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2\right)\cdot b^3}{n^3}$

also $\left(\frac{b}{n}\right)^k\cdot\frac{b}{n}+\left(\frac{2b}{n}\right)^k\cdot\frac{b}{n}+\left(\frac{3b}{n}\right)^k\cdot\frac{b}{n}+\ldots+\left(\frac{(n-1)\cdot b}{n}\right)^k\cdot\frac{b}{n}+\left(\frac{n\cdot b}{n}\right)^k\cdot\frac{b}{n}=\frac{\left(1^k+2^k+3^k+\ldots+(n-1)^k+n^k\right)\cdot b^{k+1}}{n^{k+1}}$.

Für die Summen mit dem Exponenten k gibt es jeweils eine Summenformel, die man für die Klammer im Nenner einsetzen kann. Ohne Herleitung wird hier angegeben, dass sich dann $\frac{x^{k+1}}{k+1}$ ergibt.

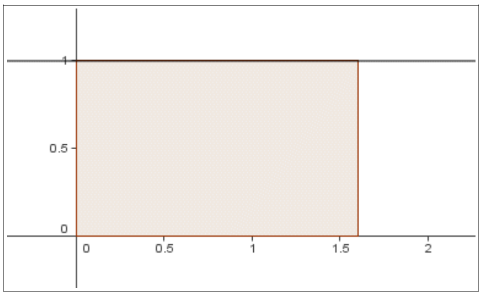
Für die Werte k=0 und k=1 kann man das sehr einfach mit Stoff der Sek.I nachweisen. Der Nachweis für k=2 wurde oben geführt.

Fall k=0:

$f(x)=x^0=1$

Der Graph der Funktion ist eine Parallele im Abstand 1 zur x-Achse.
Der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse im Bereich von 0 bis x beträgt $A(x)=x$, da die Fläche ein Rechteck mit Breite x und Höhe 1 ist.

Nach der Formel ergibt sich $A(x)=\frac{x^{k+1}}{k+1}=\frac{x^{0+1}}{0+1}=\frac{x^1}{1}=x$



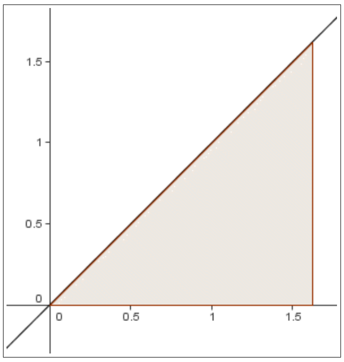
Fall k=1:

$f(x)=x^1=x$

Der Graph der Funktion ist eine Ursprungsgerade mit der Steigung 1.
Die Fläche zwischen Gerade und x-Achse im Bereich von 0 bis x ergibt ein rechtwinkliges Dreieck mit

$A(x)=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h=\frac{1}{2}\cdot x\cdot x=\frac{x^2}{2}$

Nach der Formel ergibt sich $A(x)=\frac{x^{k+1}}{k+1}=\frac{x^{1+1}}{1+1}=\frac{x^2}{2}$

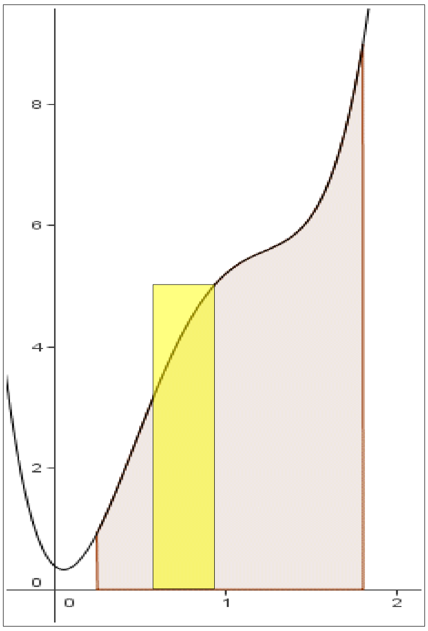


Als Zwischenergebnis können wir festhalten:

Potenzfunktionen der Art $f(x)=x^k$ mit $k\in\mathbb{N}$ haben die Flächeninhaltsfunktion $A(x)=\frac{x^{k+1}}{k+1}$

Anmerkung:
Da diese Einführung für einen Mathematik-Grundkurs geschrieben wurde, wurde bewusst auf einige Beweisschritte und teilweise auch auf Vollständigkeit bei der Beweisführung verzichtet. Stattdessen wurde mehr Wert auf Anschaulichkeit und Plausibilitätsbetrachtungen gelegt.

Teil 6: Flächeninhaltsfunktion für eine beliebige Funktion f(x)



Versuchen wir auch hier einen Term für die Obersumme zu erhalten: Die Rechtecke sollen eine Breite der Länge Δx haben und eine Höhe, die sich aus dem Funktionswert an der rechten[3] Seite des Rechtecks ergibt (siehe gelbes Beispiel-Rechteck in der Skizze).

Die Fläche solch eines Rechtecks beträgt dann $f(x_i)\cdot\Delta x$, wobei das i die Nummer des Rechtecks angibt.

Gibt es insgesamt n Rechtecke, so ergibt sich die Obersumme zu

$$f(x_1)\cdot\Delta x+f(x_2)\cdot\Delta x+...+f(x_n)\cdot\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

Je größer n wird, desto kleiner wird Δx und im Grenzfall erhält man den exakten Wert des Flächeninhalts:

$$A=\lim_{\substack{x\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

Die rechte Seite der Gleichung ist eine Kurzschreibweise der linken Seite und wird gelesen: „Integral von a bis b f von x dx“

a und b sind hier die x-Werte der linken und der rechten Begrenzung der zu berechnenden Fläche.

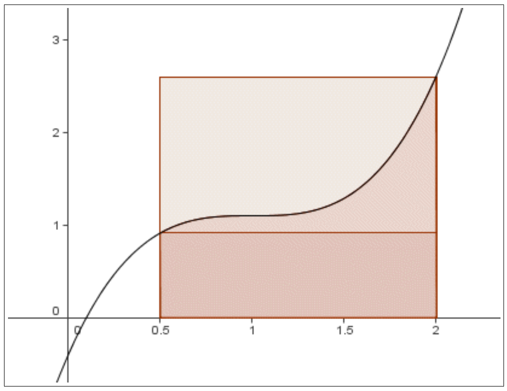
Achtung: In Verbindung mit Flächenberechnungen gilt diese Definition der Kurzschreibweise nur dann, wenn eine stetige und monoton wachsende Funktion im Integrationsbereich vorliegt, bei der die Funktionswerte alle positiv sind.

Ist A(x) der Flächeninhalt der Fläche zwischen Graph und x-Achse im Bereich von 0 bis x, so kann man entsprechend wie auf Seite 4 schreiben:

$$\int_a^b f(x)dx=[A(x)]_a^b=A(b)-A(a)$$

Der mittlere Term ist eine Kurzschreibweise für den rechten Term.

Teil 7: Beziehung zwischen f(x) und A(x)



In der Zeichnung rechts ist
mit Sicherheit der Flächeninhalt des dunkelroten Rechtecks kleiner als die Fläche zwischen dem Graph und der x-Achse im rot gefärbten Bereich und
mit Sicherheit der Flächeninhalt des hellroten Rechtecks größer als die Fläche zwischen dem Graph und der x-Achse im rot gefärbten Bereich.
Der x-Wert am linken Rand der roten Fläche sei a und am rechten Rand b (in der Zeichnung gilt a=0,5 und b=2).
Dann ist die Fläche des dunkelroten Rechtecks $(b-a)\cdot f(a)$
und die Fläche des hellroten Rechtecks $(b-a)\cdot f(b)$.
Die Fläche zwischen Kurve und x-Achse ist $A(b)-A(a)$.
Es gilt dann:

$$(b-a)\cdot f(a) \le A(b)-A(a) \le (b-a)\cdot f(b)$$

Dividiert man beide Seiten durch (b - a), so ergibt sich

$$f(a) \le \frac{A(b)-A(a)}{b-a} \le f(b)$$

3 Es wird hier nur der monoton steigende Teil der Funktion betrachtet. Für monoton fallende Teile können die Überlegungen analog durchgeführt werden. Es muss dann der Funktionswert an der linken Seite des Rechtecks verwendet werden.

Nun wird auf beiden Seiten der Grenzwert für b→a gebildet:

$$\lim_{b\to a} f(a) \;\le\; \lim_{b\to a}\frac{A(b)-A(a)}{b-a} \;\le\; \lim_{b\to a} f(b)$$

Entsprechend zu

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

gilt hier

$$\lim_{b\to a}\frac{A(b)-A(a)}{b-a}=A'(a)$$

Unter Berücksichtigung der Grenzwertbildung gilt also für die Ungleichungskette oben:

$$f(a) \;\le\; A'(a) \;\le\; f(a)$$

Da die Terme links und rechts identisch sind, muss auch der mittlere Term gleich den beiden anderen Termen sein. Also gilt $A'(a)=f(a)$, oder mit der Variable x statt a: $A'(x)=f(x)$

Die Gegenüberstellung folgender zwei Gleichungen zeigt uns nun den Zusammenhang zwischen f(x) und A(x):

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\left[A(x)\right]_a^b=A(b)-A(a) \qquad\qquad A'(x)=f(x)}$$

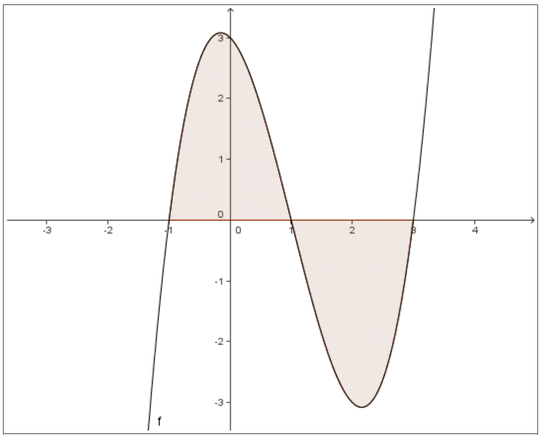
Um die Lösung des linken Integrals zu finden, muss man also eine Funktion suchen, die abgeleitet f(x) gibt.

Oder anders gesagt: Integriere ich die Funktion f(x), so erhalte ich die Funktion A(x).
Differenziere ich dagegen die Funktion A(x), so erhalte ich die Funktion f(x)

Integrieren und Differenzieren sind also entgegengesetzte Rechenarten (wie Addieren und Subtrahieren bzw. Multiplizieren und Dividieren bzw. Potenzieren und Radizieren (=Wurzelziehen))

Teil 8: Flächeninhalt einer Fläche, die sowohl oberhalb als auch unterhalb der x-Achse liegt

Es soll der Flächeninhalt der Fläche berechnet werden, die vom Graph der Funktion $f(x)=x^3-3x^2-x+3$ und der x-Achse vollständig eingeschlossen wird. In der nebenstehenden Abbildung ist diese Fläche rot eingefärbt.



In einem ersten Versuch wird das Integral von -1 bis 3 berechnet:

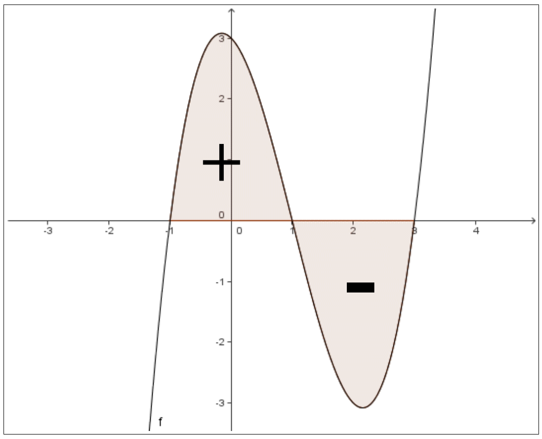
$$\int_{-1}^{3}\left(x^3-3x^2-x+3\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{3}=$$

$$\left(\frac{3^4}{4}-3^3-\frac{3^2}{2}+3\cdot 3\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}-(-1)^3-\frac{(-1)^2}{2}+3\cdot(-1)\right)=$$

$$\left(\frac{81}{4}-27-\frac{9}{2}+9\right)-\left(\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-3\right)=$$

$$\frac{81}{4}-27-\frac{9}{2}+9-\frac{1}{4}-1+\frac{1}{2}+3=\frac{80}{4}-\frac{8}{2}-16=20-4-16=0$$

Das Ergebnis 0 kann offensichtlich nicht stimmen.



Erinnern wir uns, wie wir die Ober- und Untersummen gebildet haben: Als Höhe der Rechtecke wurden die Funktionswerte der Funktion genutzt. Hier sind die Funktionswerte im Bereich von 1 bis 3 negativ, d. h. auch der Flächeninhalt müsste sich dann als negativer Wert ergeben.

Beachtet man dann noch, dass die Flächenstücke oberhalb und unterhalb der x-Achse gleich groß sind, wird es klar, dass der „positive" Flächeninhalt von -1 bis 1 und der „negative" Flächeninhalt von 1 bis 3 addiert 0 ergeben.

Man spricht bei den Zahlenwerten, die man als Maß für den Flächeninhalt bekommt, von positiv orientierten und negativ orientierten Flächeninhalten.

Zur Berechnung des (wahren) Flächeninhalts darf man also nicht so integrieren, dass sich einige Werte wegsubtrahieren.

Wenn zu berechnende Flächenteile sowohl oberhalb als auch unterhalb der x-Achse vorkommen, darf man nur von Nullstelle bis Nullstelle integrieren und muss dann die Beträge der sich ergebenden Werte addieren

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x^2-x+3\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1^4}{4}-1^3-\frac{1^2}{2}+3\cdot 1\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}-(-1)^3-\frac{(-1)^2}{2}+3\cdot(-1)\right)=$$

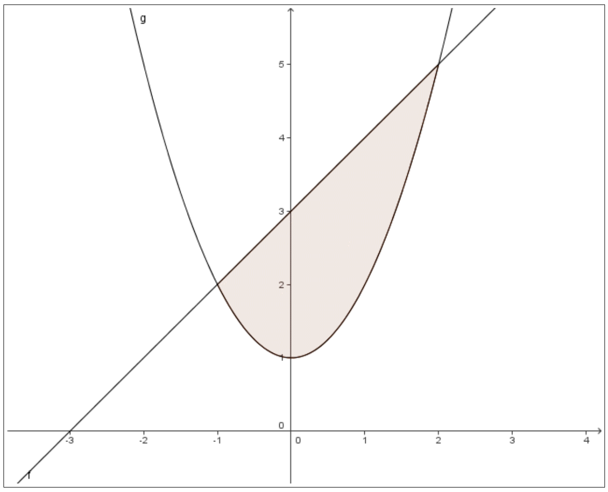
$$\left(\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3\right)-\left(\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-3\right)=\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3-\frac{1}{4}-1+\frac{1}{2}+3=4$$

$$\int_{1}^{3}\left(x^3-3x^2-x+3\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{1}^{3}=\left(\frac{3^4}{4}-3^3-\frac{3^2}{2}+3\cdot 3\right)-\left(\frac{1^4}{4}-1^3-\frac{1^2}{2}+3\cdot 1\right)=$$

$$\left(\frac{81}{4}-27-\frac{9}{2}+9\right)-\left(\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3\right)=\frac{81}{4}-27-\frac{9}{2}+9-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}-3=\frac{80}{4}-\frac{8}{2}-20=20-4-20=-4$$

Flächeninhalt $A=|+4|+|-4|=4+4=8$

Teil 9: Flächeninhaltsberechnung einer Fläche, die von zwei Graphen eingeschlossen wird.



Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit den Gleichungen $f(x)=x+3$ und $g(x)=x^2+1$.

Der Flächeninhalt (rechts in der Zeichnung rötlich eingefärbt), der von beiden zugehörigen Graphen eingeschlossen wird, soll berechnet werden.

Dazu müssen wir erst einmal die genauen x-Werte der Schnittpunkte von Parabel und Gerade kennen:

$$f(x)=g(x)\rightarrow\ x+3=x^2+1\ \rightarrow\ x^2-x-2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}\ \rightarrow$$

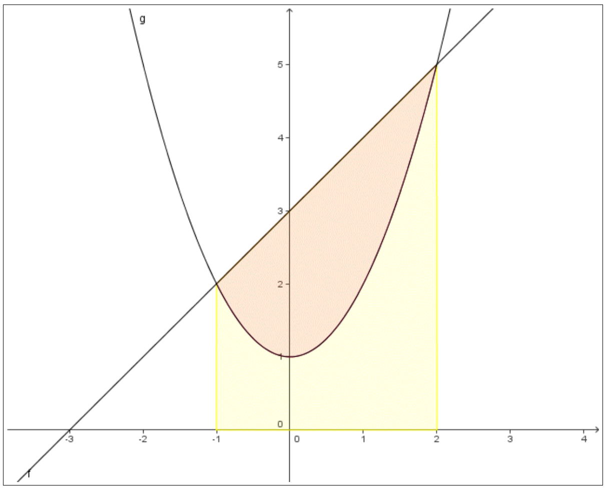
$$x_1=\frac{4}{2}=2\ ;\ x_2=-\frac{2}{2}=-1$$

Wir greifen auf Bekanntes zurück und berechnen zunächst den Flächeninhalt zwischen Gerade und x-Achse im Bereich von -1 bis 2
und subtrahieren davon den Flächeninhalt zwischen Parabel und x-Achse im Bereich von -1 bis 2.

$$\int_{-1}^{2}f(x)\,dx-\int_{-1}^{2}g(x)\,dx$$

Erinnern wir uns an die ausführliche Berechnung mit Ober- und Untersummen: Die senkrechten Strecken der Rechtecke waren die Funktionswerte. Würden wir hier unsere Rechtecke zeichnen, so wären die senkrechten Strecken gleich der Differenz der Funktionswerte der Funktionen f(x) und g(x).
Wir würden also folgendes Integral erhalten:

$$\int_{-1}^{2} \left(f(x) - g(x) \right) dx$$



Wie beim Differenzieren dürfen wir auch beim Integrieren ein Integral Summand für Summand integrieren und dann die Zwischenergebnisse zusammenfassen oder mehrere Integrale mit denselben Grenzen zu einem Integral zusammenfassen:

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\,dx - \int_{a}^{b} g(x)\,dx = \int_{a}^{b} \left(f(x) - g(x) \right) dx}$$

$$\int_{-1}^{2} \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_{-1}^{2} \left((x+3) - (x^2+1) \right) dx = \int_{-1}^{2} \left(x+3-x^2-1 \right) dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^2+x+2 \right) dx =$$

$$\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2 \cdot x \right]_{-1}^{2} = \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) \right) = \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) =$$

$$-\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = -\frac{9}{3} - \frac{1}{2} + 8 = -3 - \frac{1}{2} + 8 = \frac{9}{2}$$

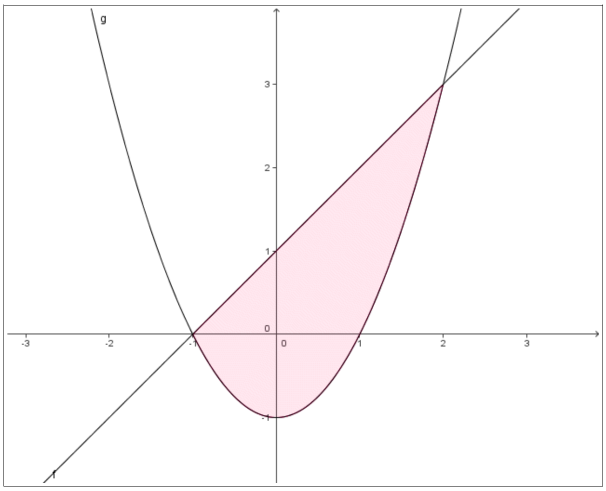
Hätten wir statt $\int_{-1}^{2} \left(f(x) - g(x) \right) dx$ das Integral $\int_{-1}^{2} \left(g(x) - f(x) \right) dx$ berechnet, hätte sich ein negatives Ergebnis ergeben. Wie in Teil 8 können sich also auch bei der Berechnung von Flächen, die von zwei Graphen eingeschlossen werden, positiv und negativ orientierte Flächeninhalte ergeben.
Integrieren darf man deshalb bei Flächenberechnungen nur von Schnittstelle bis Schnittstelle.

Der Fall „Fläche zwischen Graph und x-Achse“ kann übrigens als Sonderfall von „Fläche zwischen zwei Graphen“ aufgefasst werden, wenn man die x-Achse als zweiten Graph $g(x)=0$ interpretiert.

Teil 10: Berechnung des Flächeninhalts einer von zwei Graphen begrenzten Fläche, wenn die x-Achse diese Fläche schneidet

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit den Gleichungen $f(x)=x+1$ und $g(x)=x^2-1$.

Der Flächeninhalt (rechts in der Zeichnung rötlich eingefärbt), der von beiden zugehörigen Graphen eingeschlossen wird, soll berechnet werden.



Nun liegt ein Teil der Fläche unterhalb und ein Teil oberhalb der x-Achse. Wird die Berechnung dadurch nicht sehr kompliziert?

Vergleichen wir die Fläche mit der Fläche in Teil 9, so erkennen wir, dass die Flächeninhalte übereinstimmen müssen.

Wir können die Fläche also um 2 Einheiten anheben und berechnen dann den Flächeninhalt der verschobenen Fläche.

Statt $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$ berechnen wir also

$\int_a^b ((f(x)+c)-(g(x)+c))\,dx = \int_a^b (f(x)+c-g(x)-c)\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$ und sehen, dass sich auch rechnerisch derselbe Wert ergeben muss.

Bei der Flächeninhalts-Berechnung von Flächen, die von zwei Graphen begrenzt werden, kann die Lage der x-Achse ignoriert werden.

Teil 11: Beispiele zur Flächenberechnung bei trigonometrischen Funktionen

a) Fläche zwischen dem Graph von sin x und der x-Achse im Bereich zwischen x=0 und x=2π

Da die Flächenstücke ober- und unterhalb der x-Achse liegen, werden die betreffenden Integrale getrennt berechnet:

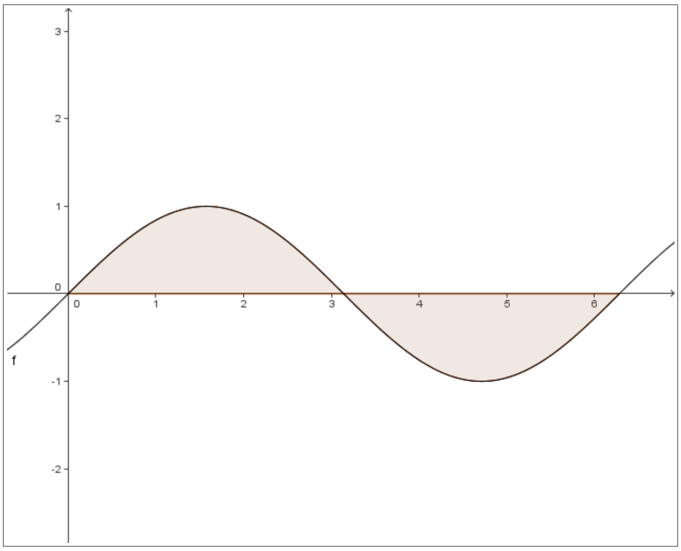
$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos\pi)-(-\cos 0) =$$

$$(-(-1))-(-(+1)) = 1+1 = 2$$

$$\int_{\pi}^{2\cdot\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_{\pi}^{2\cdot\pi} = (-\cos(2\cdot\pi))-(-\cos\pi) =$$

$$(-(+1))-(-(-1)) = (-1)+(-1) = -2$$

$$A = |+2|+|-2| = 2+2 = 4$$



b) Fläche zwischen den Graphen von sin x und cos x im Bereich von π/4 und 5π/4

Die Kurven von sin x und cos x schneiden sich bei den oben angegebenen Werten.

Die Lage der x-Achse muss nicht berücksichtigt werden.

Mit $f(x)=\sin x$ und $g(x)=\cos x$ ergibt sich:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\cdot\pi} (f(x)-g(x))\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\cdot\pi} (\sin x-\cos x)\,dx =$$

$$[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\cdot\pi} =$$

$$\left(+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right) =$$

$$4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} = 2\cdot\sqrt{2} \approx 2{,}828$$