Abstandsberechungen bei Geraden im 3-dim-Raum

Vorüberlegung

Zwei Geraden im Raum können identisch sein, sich schneiden, parallel liegen oder windschief sein.

Falls die Geraden **identisch** sind oder sich **schneiden**, ist der Abstand trivialer Weise 0.

Liegen die Geraden $g: \vec{r}_g = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{r}_h = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}$ **parallel**, so haben die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die gleiche Richtung (sie sind linear abhängig). Es gilt dann $\vec{u} = c \cdot \vec{v}$.
Wegen der Parallelität hat jeder Punkt der Geraden g denselben Abstand zur Geraden h wie die Gerade g selbst.
Die Berechung des Abstandes vereinfacht sich also zur Aufgabe „Berechnen Sie den Abstand eines Punktes der Geraden g zur Geraden h“:

1. Der Vektor $\vec{d} = -\vec{a} + \vec{r}_h$ zeigt vom Stützpunkt A der Geraden g zu einem Punkt der Geraden h.
2. Damit die Länge von $\vec{d}$ den Abstand von A zu h angibt, muss $\vec{d}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden h stehen.
   Es muss also gelten: $\vec{d} * \vec{v} = 0$.
   Die Gleichung $\vec{d} * \vec{v} = 0$ muss gelöst werden.
   In den Vektor $\vec{d}$ wird der gefundene μ-Wert eingesetzt.
3. Die Länge des Vektors $\vec{d}$ und damit der gesuchte Abstand wird (Phytagoras im 3-dim-Raum) ermittelt.

Sind die Geraden **windschief**, so haben die Richtungsvektoren der beiden Geraden nicht dieselbe Richtung (sie sind linear unabhängig). Es gilt dann $\vec{u} \neq c \cdot \vec{v}$.
Die Geraden dürfen sich aber auch nicht schneiden, was dadurch überprüft werden kann, dass die Gleichung $\vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v}$ keine Lösung besitzt.
Zur Abstandsberechnung führt man folgende Schritte aus:

1. Der Vektor $\vec{d} = -\vec{r}_g + \vec{r}_h$ zeigt von einem Punkt der Geraden g zu einem Punkt der Geraden h.
2. Damit die Länge von $\vec{d}$ den Abstand zwischen g und h angibt, muss $\vec{d}$ senkrecht auf den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der beiden Geraden g und h stehen.
   Es muss also gelten: $\vec{d} * \vec{u} = 0$ und $\vec{d} * \vec{v} = 0$.
   Das Gleichungssystem $\vec{d} * \vec{u} = 0$; $\vec{d} * \vec{v} = 0$ muss gelöst werden.
   In den Vektor $\vec{d}$ werden die gefundenen λ- und μ-Werte eingesetzt.
3. Die Länge des Vektors $\vec{d}$ und damit der gesuchte Abstand wird (Phytagoras im 3-dim-Raum) ermittelt.

Anmerkung: Im Laufe des Unterrichts werden noch weitere und einfachere Methoden zur Abstandsberechnung behandelt.

Beispiel 1

Gegeben sind zwei Geraden durch ihre Gleichungen. Der Abstand der Geraden ist zu bestimmen.

$$g: \vec{r}_g = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; g: \vec{r}_h = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da $\vec{v} = -2 \cdot \vec{u}$, also $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, sind die beiden Geraden parallel.

Sind die beiden Geraden identisch, muss der Stützvektor $\vec{a}$ der Geraden g zur Gerade h zeigen:

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ Für die einzelnen Komponenten ergeben sich folgende μ-Werte:

$\mu_1 = -\frac{3}{4}$; $\mu_2 = -1$; $\mu_3 = 4$ Da die μ-Werte nicht übereinstimmen, sind die Geraden nicht identisch.

Die folgenden Rechnungen laufen entsprechend dem oben angegebenen Plan:

1. Schritt:

$$\vec{d} = -\vec{a} + \vec{r}_h = -\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-4\mu \\ 6+6\mu \\ -8+2\mu \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

$$\vec{d} * \vec{v} = 0 \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} -3-4\mu \\ 6+6\mu \\ -8+2\mu \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \;\rightarrow\; 12+16\mu+36+36\mu-16+4\mu = 0 \;\rightarrow\; 32+56\mu = 0 \;\rightarrow\; \mu = -\frac{32}{56} = -\frac{4}{7}$$

3. Schritt:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -3-4\cdot\left(-\frac{4}{7}\right) \\ 6+6\cdot\left(-\frac{4}{7}\right) \\ -8+2\cdot\left(-\frac{4}{7}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{18}{7} \\ -\frac{64}{7} \end{pmatrix} \;\rightarrow\; |\vec{d}| = \sqrt{\frac{25}{49} + \frac{324}{49} + \frac{4096}{49}} = \sqrt{\frac{4445}{49}} = \sqrt{\frac{635}{7}} \approx 9{,}52$$

Der Abstand der beiden parallelen Geraden beträgt also etwa 9,52 Längeneinheiten.

Beispiel 2

Gegeben sind zwei Geraden durch ihre Gleichungen. Der Abstand der Geraden ist zu bestimmen.

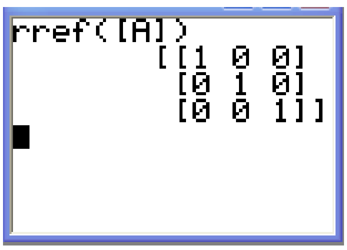
$$g: \vec{r}_g = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \;;\; g: \vec{r}_h = \vec{b} + \mu \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ wegen $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht linear abhängig sind, schneiden sich die beiden Geraden oder sie sind windschief.

Wenn sich die beiden Geraden schneiden würden, müsste die Gleichung $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ eine Lösung besitzen:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Taschenrechner TI-84 liefert mit dem rref-Befehl für Matrizen die Lösung:



Wegen der 3. Zeile (0 = 1) gibt es keine Lösung, die Geraden schneiden sich also nicht.

Die Berechnung des Abstandes der beiden windschiefen Geraden verläuft nach dem oben angegebenen Schema:

1. Schritt:

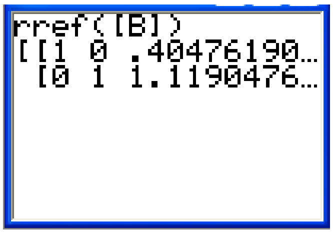
$$\vec{d} = -\vec{r}_g + \vec{r}_h = -\begin{pmatrix}0\\6\\2\end{pmatrix} - \lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7\\1\\6\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7-2\lambda\\-5+2\lambda+2\mu\\4-3\lambda+\mu\end{pmatrix}$$

2. Schritt:

$$\vec{d} * \vec{u} = 0 \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}-7-2\lambda\\-5+2\lambda+2\mu\\4-3\lambda+\mu\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} = 0 \;\rightarrow\; -14-4\lambda+10-4\lambda-4\mu+12-9\lambda+3\mu=0 \;\rightarrow\; 8-17\lambda-\mu=0$$

$$\vec{d} * \vec{v} = 0 \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}-7-2\lambda\\-5+2\lambda+2\mu\\4-3\lambda+\mu\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = 0 \;\rightarrow\; 0-10+4\lambda+4\mu+4-3\lambda+\mu=0 \;\rightarrow\; -6+\lambda+5\mu=0$$

Das Gleichungssystem $\begin{Bmatrix}17\lambda+\mu=8\\ \lambda+5\mu=6\end{Bmatrix}$ wird mit dem Taschenrechner TI-84 gelöst:



Mit λ=0,40 und μ=1,12 ergibt sich $\vec{d} = \begin{pmatrix}-7-2\cdot 0{,}40\\-5+2\cdot 0{,}40+2\cdot 1{,}12\\4-3\cdot 0{,}40+1{,}12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7{,}80\\-1{,}96\\3{,}92\end{pmatrix}$

3. Schritt

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{(-7{,}80)^2+(-1{,}96)^2+3{,}92^2} \approx \sqrt{80} \approx 8{,}9$$

Der Abstand zwischen den Geraden beträgt etwa 8,9 Längeneinheiten.