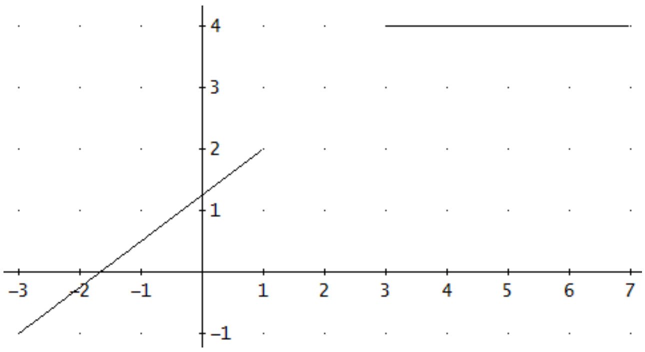
Hausaufgabe zum 2006-06-09 - Thema: Aufstellen einer Funktionsgleichung

Aufgabe:

Die beiden Strecken sollen so durch den Graph einer ganzrationalen Funktion f verbunden werden, dass an den Schnittstellen kein Knick entsteht.



Lösung:

Die Funktionswerte und die Steigungen (1. Ableitung) müssen an den Schnittstellen übereinstimmen.

Die linke Strecke hat die Steigung $\frac{3}{4}$, die rechte Strecke die Steigung 0.

$$f(1)=2 \;;\; f'(1)=\frac{3}{4} \;;\; f(3)=4 \;;\; f'(3)=0$$

Da 4 Bedingungen existieren, muss die Funktionsgleichung 4 Parameter aufweisen und damit vom Grad 3 sein:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \;;\; f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

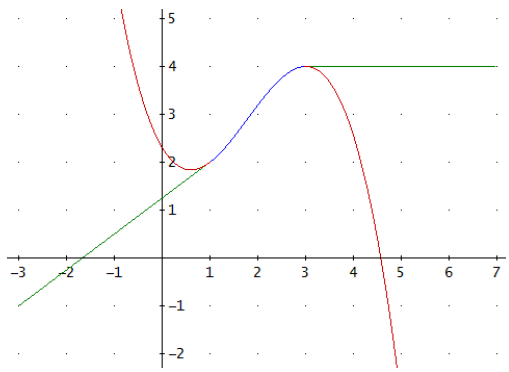
Setzt man die 4 Bedingungen in die Funktionsgleichung und die Ableitungsgleichung ein, so erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{lcr} f(1)=2 & \Rightarrow & a+b+c+d=2 \\ f'(1)=\frac{3}{4} & \Rightarrow & 3a+2b+c=\frac{3}{4} \\ f(3)=4 & \Rightarrow & 27a+9b+3c+d=4 \\ f'(3)=0 & \Rightarrow & 27a+6b+c=0 \end{array}\right\} \qquad \text{Matrix: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 4 \\ 27 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der TI-84 liefert die Lösung: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0{,}3125 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1{,}6875 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1{,}6875 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2{,}3125 \end{pmatrix}$ Exakt ergibt sich $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{16} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{27}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{27}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{37}{16} \end{pmatrix}$.

Die gesuchte Funktionsgleichung ist also

$$f(x)=-\frac{5}{16}\cdot x^3+\frac{27}{16}\cdot x^2-\frac{27}{16}\cdot x+\frac{37}{16}$$



Aufgabe:

Die Funktion g soll dieselben Bedingungen wie Funktion f erfüllen, aber außerdem sollen an den Schnittstellen auch die 2. Ableitungen übereinstimmen.

Lösung:

Die 2. Ableitungen haben an beiden Schnittstellen den Wert 0.

Folgende Bedingungen müssen also erfüllt sein:

$$g(1)=2\ ;\ g'(1)=\frac{3}{4}\ ;\ g(3)=4\ ;\ g'(3)=0\ ;\ g''(1)=0\ ;\ g''(3)=0$$

Wegen der 2 zusätzlichen Bedingungen muss die Funktion g also mindestens vom Grad 5 sein:

$$g(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f\ ;\ g'(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e\ ;$$
$$g''(x)=20ax^3+12bx^2+6cx+2d$$

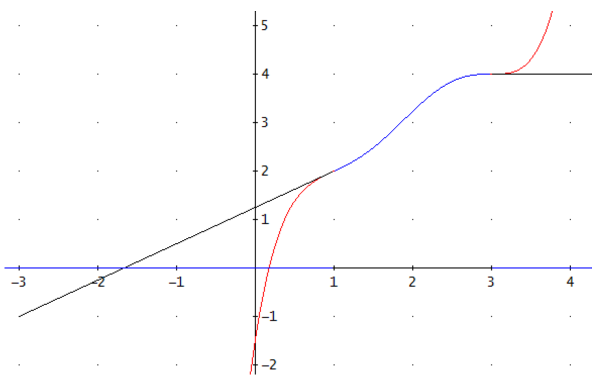
Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc} g(1)=2 & \Rightarrow & a+b+c+d+e+f=2 \\ g'(1)=\frac{3}{4} & \Rightarrow & 5a+4b+3c+2d+e=\frac{3}{4} \\ g(3)=4 & \Rightarrow & 243a+81b+27c+9d+3e+f=4 \\ g'(3)=0 & \Rightarrow & 405a+98b+27c+6d+e=0 \\ g''(1)=0 & \Rightarrow & 20a+12b+6c+2d=0 \\ g''(3)=0 & \Rightarrow & 540a+108b+18c+2d=0 \end{array}\right) \quad \text{Matrix: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 & 4 \\ 405 & 98 & 27 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 12 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 540 & 108 & 18 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

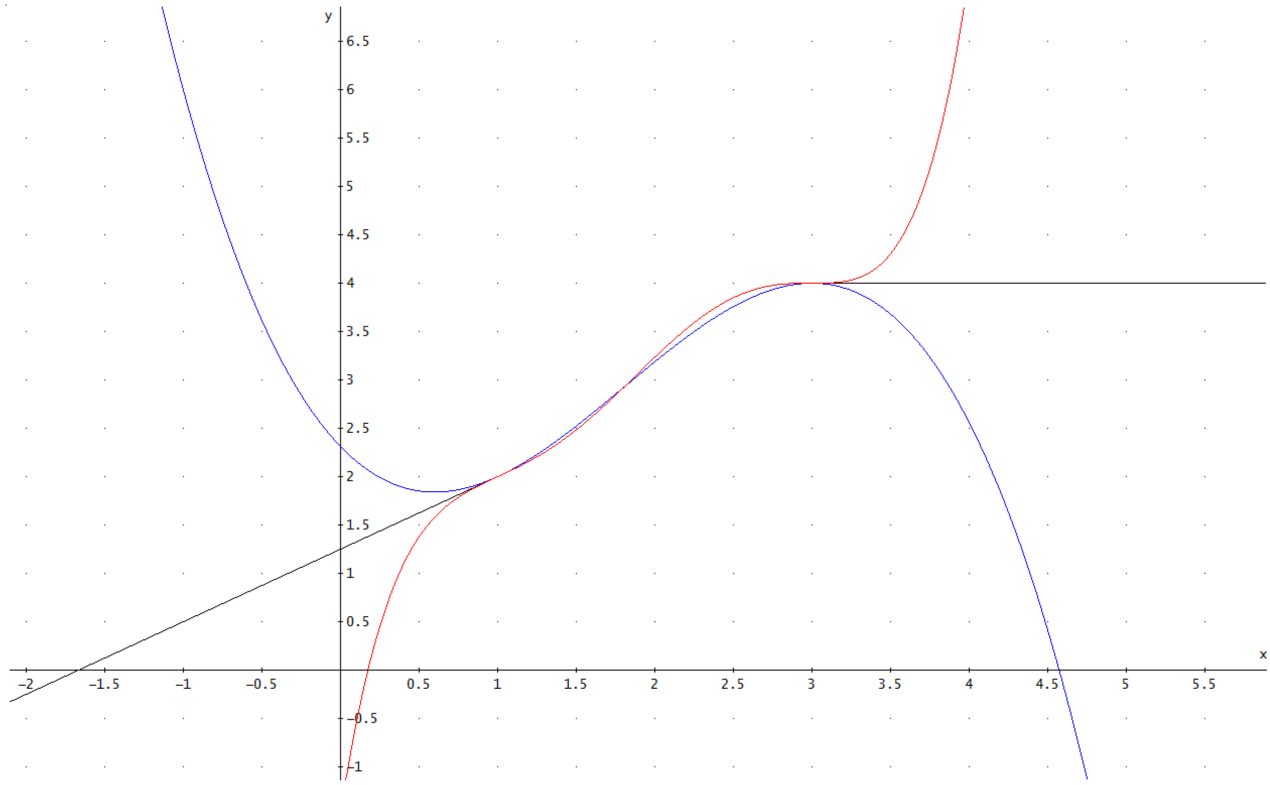
$$\text{TI-84-Lösung: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.234375 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.296875 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8.21875 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -13.21875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10.546875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.484375 \end{pmatrix} \quad \text{Exakt: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{64} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{147}{64} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{263}{32} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{423}{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{675}{64} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{95}{64} \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung ist also:

$$g(x)=\frac{15}{64}x^5-\frac{147}{64}x^4+\frac{263}{32}x^3-\frac{423}{32}x^2+\frac{675}{64}x-\frac{95}{64}$$



Vergleich der beiden Lösungen:



Der Unterschied der Kurven ist kaum zu sehen, wird aber deutlich, wenn man die Kurven durchfahren würde.

Bei der Kurve (blau) aus der 1. Aufgabe würde man an den Schnittstellen einen seitlichen Ruck spüren.

Erst die Bedingung „2. Ableitung gleich 0“ für die Schnittstellen garantiert einen ruckelfreien und glatten Übergang (rote Kurve).