Minimale Entfernung zweier Körper, die sich auf windschiefen Geraden bewegen

Zwei Flugzeuge bewegen sich auf zueinander windschiefen Geraden.
Es ist nun nicht nach dem Abstand zwischen den Flugbahnen, sondern nach dem minimalen Abstand der Flugzeuge gefragt. Selbst bei sich schneidenden Flugbahnen müssen die Flugzeuge nicht zusammenstoßen, wenn sie zu unterschiedlichen Zeiten am Schnittpunkt der Flugbahnen ankommen.

Die Geradengleichungen enthalten in diesem Fall beide denselben Parameter t, der die Zeit angibt:

$$\vec{r}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\ ;\ \vec{r}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Die Stützvektoren geben den Ort der Flugzeuge zur Zeit t=0 an.

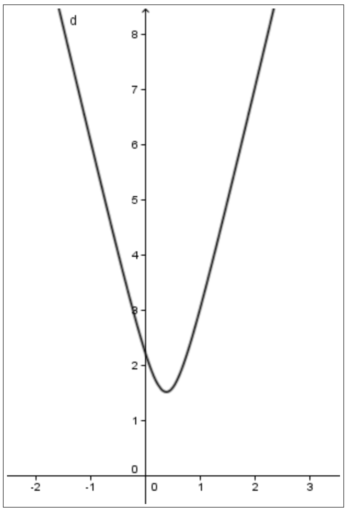
Die Richtungsvektoren stehen für Geschwindigkeitsvektoren, die, multipliziert mit der Zeit t, einen Streckenvektor ergeben, der zeigt, welche Strecke (samt Richtung) in der Zeit t seit Beginn der Zeitrechnung zurückgelegt wurde.

Lösungsidee:
Der Vektor $\vec{d}=-\vec{r}_1+\vec{r}_2$ ist ein Vektor, der zur Zeit t vom Flugzeug 1 zum Flugzeug 2 zeigt.
Gesucht ist das t, für das dieser Vektor kleinstmöglich wird.

$$\vec{d}=-\vec{r}_1+\vec{r}_2=-\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}-t\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-t\\-t\\2-4t\end{pmatrix}$$

Daraus folgt $d=|\vec{d}|=\sqrt{(-1-t)^2+(-t)^2+(2-4t)^2}=\sqrt{1+2t+t^2+t^2+4-16t+16t^2}=\sqrt{18t^2-14t+5}$

Fasst man den Abstand d als Funktionswert in Abhängigkeit von der Zeit t auf, so ergibt sich der rechts stehende Graph.



Das Minimum erhält man durch Bestimmung der waagrechten Tangente:

$$d\,'(t)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{18t^2-14t+5}}\cdot(36t-14)$$

$$d\,'(t)=0\ \rightarrow\ 36t-14=0\ \rightarrow\ t=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}\approx 0{,}39$$

Einsetzen in den Term für d:

$$d\left(\frac{7}{18}\right)=\sqrt{18\cdot\left(\frac{7}{18}\right)^2-14\cdot\left(\frac{7}{18}\right)+5}=\sqrt{\frac{49-98+90}{18}}=\sqrt{\frac{41}{18}}\approx 1{,}5$$

Der kürzeste Abstand zwischen den Flugzeugen beträgt zum Zeitpunkt $t=\frac{7}{18}$ etwa 1,5 Längeneinheiten.