

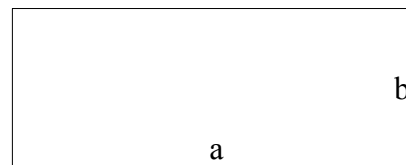
Hausaufgabe zum 2006-06-02 - Thema „Extremwertaufgaben“

Aufgabe: Ein Rechteck soll den Flächeninhalt $A=10\text{cm}^2$ besitzen. Wie muss man die Rechteckseiten wählen, damit das Rechteck minimalen Umfang hat?

Lösung:

1. *Zeichnung und verwendete Größen:*

- a: Breite des Rechtecks
- b: Höhe des Rechtecks
- A: Flächeninhalt des Rechtecks



2. *Nebenbedingungen*

$$A = a \cdot b \text{ oder umgeformt } b = \frac{A}{a}$$

3. *Aufstellen der Zielfunktion*

$$\text{Umfang } U(a, b) = 2a + 2b$$

$$\text{Mit der Nebenbedingung ergibt sich } U(a) = 2a + 2 \cdot \frac{A}{a}$$

4. *Extremwert bestimmen*

$$U'(a) = 2 - \frac{2A}{a^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 2 = \frac{2A}{a^2} \Rightarrow a^2 = A \Rightarrow a = \sqrt{A}$$

$$U''(a) = \frac{4A}{a^3} \Rightarrow U''(\sqrt{A}) = \frac{4A}{\sqrt{A}^3} > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

5. *Beantwortung der Aufgabe*

$$\text{Aus der Nebenbedingung ergibt sich } b = \frac{A}{a} = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}.$$

Da $a=b$, ist das gesuchte Rechteck ein Quadrat, unabhängig von der Größe des Flächeninhalts.

Für den Flächeninhalt $A=10\text{cm}^2$ ergibt sich ein Quadrat der Seitenlänge $\sqrt{10}\text{cm}$.