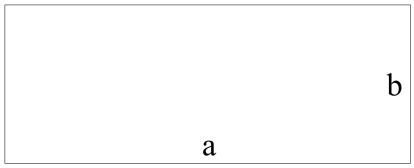
Hausaufgabe zum 2006-06-02 - Thema „Extremwertaufgaben“

Aufgabe: Ein Rechteck soll den Flächeninhalt $A = 10\text{cm}^2$ besitzen. Wie muss man die Rechteckseiten wählen, damit das Rechteck minimalen Umfang hat?

Lösung:

1. *Zeichnung und verwendete Größen:*



a: Breite des Rechtecks
b: Höhe des Rechtecks
A: Flächeninahlt des Rechtecks

2. *Nebenbedingungen*

$A = a \cdot b$ oder umgeformt $b = \frac{A}{a}$

3. *Aufstellen der Zielfunktion*

Umfang $U(a, b) = 2\text{a} + 2\text{b}$

Mit der Nebenbedingung ergibt sich $U(a) = 2\text{a} + 2 \cdot \frac{A}{a}$

4. *Extremwert bestimmen*

$$U'(a) = 2 - \frac{2\text{A}}{a^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 2 = \frac{2\text{A}}{a^2} \Rightarrow a^2 = A \Rightarrow a = \sqrt{A}$$

$$U''(a) = \frac{4\text{A}}{a^3} \Rightarrow U''(\sqrt{A}) = \frac{4\text{A}}{\sqrt{A}^3} > 0 \Rightarrow \textit{Minimum}$$

5. *Beantwortung der Aufgabe*

Aus der Nebenbedingung ergibt sich $b = \frac{A}{a} = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$.

Da $a = b$, ist das gesuchte Rechteck ein Quadrat, unabhängig von der Größe des Flächeninhalts.

Für den Flächeninhalt $A = 10\text{cm}^2$ ergibt sich ein Quadrat der Seitenlänge $\sqrt{10}\,cm$.