

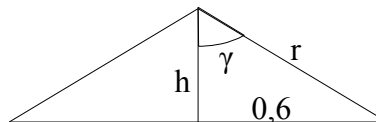
# Hausaufgabe zum 2006-05-31 - Thema „Extremwertaufgaben“

**Aufgabe:** Genau über der Mitte eines runden Tisches wird eine Lampe angebracht. Die Lichtstärke  $L$  ist zu  $\cos \gamma$  proportional und zu  $r^2$  umgekehrt proportional. Wie hoch muss die Lampe hängen, damit am Rand des Tisches die Beleuchtungsstärke maximal wird?  
Durchmesser des Tisches ist 1,2 m.

## Lösung:

### 1. Zeichnung und verwendete Größen:

h: Höhe der Lampe  
r: Abstand der Lampe vom Rand des Tisches  
 $\gamma$ : Halber Öffnungswinkel der Lampe



### 2. Nebenbedingungen

$$\sin \gamma = \frac{0,6}{r} \quad \cos \gamma = \frac{h}{r} \quad \tan \gamma = \frac{0,6}{h} \quad h^2 + 0,6^2 = r^2$$

### 3. Aufstellen der Zielfunktion

Aus  $L \sim \cos \gamma$  und  $L \sim \frac{1}{r^2}$  folgt  $L \sim \frac{\cos \gamma}{r^2}$ , d. h.  $L(\gamma, r) = c \cdot \frac{\cos \gamma}{r^2}$  mit Konstante  $c$ .

Aus der Nebenbedingung  $\sin \gamma = \frac{0,6}{r}$  folgt  $r = \frac{0,6}{\sin \gamma}$ .

$$\text{Einsetzen in } L(\gamma, r) \text{ liefert } L(\gamma) = c \cdot \frac{\cos \gamma}{\frac{0,6^2}{\sin^2 \gamma}} = c \cdot \frac{\cos \gamma \cdot \sin^2 \gamma}{0,36} = \frac{c}{0,36} \cdot \cos \gamma \cdot (1 - \cos^2 \gamma)$$

$$\text{Substitution } z = \cos \gamma \text{ führt zu } L(z) = \frac{c}{0,36} \cdot z \cdot (1 - z^2) = \frac{c}{0,36} \cdot z - \frac{c}{0,36} \cdot z^3$$

### 4. Extremwert bestimmen

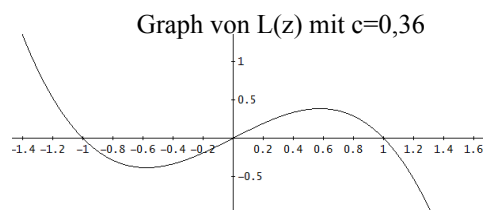
$$L'(z) = \frac{c}{0,36} - \frac{3c}{0,36} \cdot z^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{3c}{0,36} \cdot z^2 = \frac{c}{0,36} \Rightarrow z^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$$

Achtung:  $z$  ist unabhängig von  $c$ !

$$L''(z) = -\frac{6c}{0,36} \cdot z \Rightarrow L''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{6c}{0,36} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

Aus  $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$  folgt  $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$  und damit  $\gamma \approx 54,7^\circ$ .



5. *Beantwortung der Aufgabe*

Mit der Nebenbedingung  $\tan \gamma = \frac{0,6}{h}$  folgt  $h = \frac{0,6}{\tan \gamma} \approx \frac{0,6}{\tan 54,7^\circ} \approx 0,42$

Die Lampe muss also 42 cm über dem Tisch aufgehängt werden bei einem Öffnungswinkel von  $2\gamma = 109,4^\circ$ .

Aus dem Graphen entnimmt man, dass es wegen  $z > 0$  keine Randmaxima gibt.