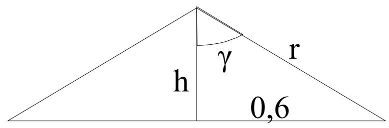
Hausaufgabe zum 2006-05-31 - Thema „Extremwertaufgaben“

Aufgabe: Genau über der Mitte eines runden Tisches wird eine Lampe angebracht. Die Lichtstärke L ist zu $\cos\gamma$ proportional und zu r^2 umgekehrt proportional.
Wie hoch muss die Lampe hängen, damit am Rand des Tisches die Beleuchtungsstärke maximal wird?
Durchmesser des Tisches ist 1,2 m.

Lösung:

1. Zeichnung und verwendete Größen:

h: Höhe der Lampe
r: Abstand der Lampe vom Rand des Tisches
γ: Halber Öffnungswinkel der Lampe



2. Nebenbedingungen

$$\sin\gamma=\frac{0{,}6}{r} \qquad \cos\gamma=\frac{h}{r} \qquad \tan\gamma=\frac{0{,}6}{h} \qquad h^2+0{,}6^2=r^2$$

3. Aufstellen der Zielfunktion

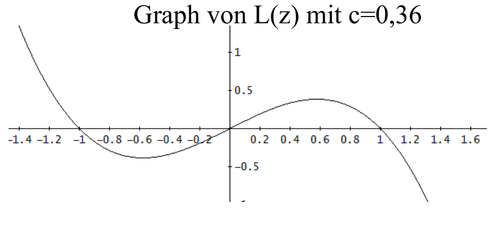
Aus $L\sim\cos\gamma$ und $L\sim\frac{1}{r^2}$ folgt $L\sim\frac{\cos\gamma}{r^2}$, d. h. $L(\gamma,r)=c\cdot\frac{\cos\gamma}{r^2}$ mit Konstante c.

Aus der Nebenbedingung $\sin\gamma=\frac{0{,}6}{r}$ folgt $r=\frac{0{,}6}{\sin\gamma}$.

Einsetzen in $L(\gamma,r)$ liefert $L(\gamma)=c\cdot\frac{\cos\gamma}{\frac{0{,}6^2}{\sin^2\gamma}}=c\cdot\frac{\cos\gamma\cdot\sin^2\gamma}{0{,}36}=\frac{c}{0{,}36}\cdot\cos\gamma\cdot(1-\cos^2\gamma)$

Substitution $z=\cos\gamma$ führt zu $L(z)=\frac{c}{0{,}36}\cdot z\cdot(1-z^2)=\frac{c}{0{,}36}\cdot z-\frac{c}{0{,}36}\cdot z^3$

Graph von L(z) mit c=0,36



4. Extremwert bestimmen

$$L'(z)=\frac{c}{0{,}36}-\frac{3c}{0{,}36}\cdot z^2\overset{!}{=}0$$

$$\frac{3c}{0{,}36}\cdot z^2=\frac{c}{0{,}36} \;\Rightarrow\; z^2=\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; z=\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}577$$

Achtung: z ist unabhängig von c!

$$L''(z)=-\frac{6c}{0{,}36}\cdot z \;\Rightarrow\; L''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{6c}{0{,}36}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}<0 \;\Rightarrow\; \text{Maximum}$$

Aus $z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ folgt $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$ und damit $\gamma\approx 54{,}7°$.

5. Beantwortung der Aufgabe

Mit der Nebenbedingung $\tan\gamma = \frac{0{,}6}{h}$ folgt $h = \frac{0{,}6}{\tan\gamma} \approx \frac{0{,}6}{\tan 54{,}7°} \approx 0{,}42$

Die Lampe muss also 42 cm über dem Tisch aufgehängt werden bei einem Öffnungswinkel von $2\gamma = 109{,}4°$.

Aus dem Graphen entnimmt man, dass es wegen $z > 0$ keine Randmaxima gibt.