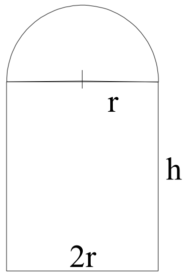
Hausaufgabe zum 2006-05-30 - Thema „Extremwertaufgaben“

Aufgabe: Ein Rundbogenfenster hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Das Glas im rechteckigen Bereich lässt 90% des Lichts durch, das Glas im kreisförmigen Bereich nur 65%. Der Umfang des gesamten Fensters soll 6m betragen. Mit welchen Maßen muss man das Fenster bauen, damit möglichst viel Licht hindurchgelassen wird?

Lösung:



1. *Zeichnung und verwendete Größen:*

   h: Höhe des Rechtecks
   r: Radius des Kreises
   U: Umfang des Fensters

2. *Nebenbedingungen*

   Länge des Halbkreises: $\pi \cdot r$ (Ein Vollkreis hat den Umfang $2 \cdot \pi \cdot r$)
   $U = 2 \cdot h + 2 \cdot r + \pi \cdot r$

3. *Aufstellen der Zielfunktion:*

   Die durchgelassene Lichtmenge ergibt sich aus dem Flächeninhalt jedes Fensters:
   Fläche des rechteckigen Fensters: $A_r = 2 \cdot r \cdot h$
   Fläche des kreisförmigen Fensters: $A_k = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$
   Dass die Fenster nur p% des auffallenden Lichts durchlassen wird dadurch berücksichtigt, dass die Fläche jedes Fensters auf p% der eigentlichen Fenstergröße verringert wird. Man nimmt also an, p% des Fensters seien vollkommen durchsichtig und (100-p)% des Fensters seien undurchsichtig.

   Daraus ergeben sich die Lichtmengen aus den Fensterflächen zu
   $L_r = \frac{90}{100} \cdot A_r = \frac{90}{100} \cdot 2\text{rh} = \frac{180}{100} \cdot rh = \frac{9}{5} \cdot rh$ und $L_k = \frac{65}{100} \cdot A_k = \frac{65}{100} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{65}{200} \cdot \pi r^2 = \frac{13}{40} \cdot \pi r^2$

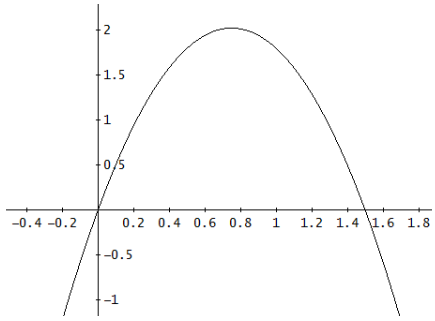
   (Anmerkung für kritische Leser: Die Lichtmengen haben die Einheit einer Fläche. Eigentlich müsste man, da die Lichtmengen proportional zum Flächeninhalt sind ($L_i \sim A_i$), noch einen Proportionalitätsfaktor einfügen ($L_i = c \cdot A_i$). Dieser Faktor ist für die weitere Rechnung aber ohne Belang und wird deshalb weg gelassen)

   Die Zielfunktion berechnet sich aus der Summe der Lichtmengen: $L = L_r + L_k$.
   Sie hängt ab von den Variablen r und h: $L(r, h) = \frac{9}{5} \cdot rh + \frac{13}{40} \cdot \pi r^2$
   Mit den Nebenbedingung $U = 2 \cdot h + 2 \cdot r + \pi \cdot r$ und U=6 lässt sich die Variable h entfernen:
   $2\text{h} = U - 2\text{r} - \pi r \;\Rightarrow\; h = \frac{U}{2} - r - \frac{\pi r}{2} = 3 - r - \frac{\pi r}{2}$

Einsetzen in die Zielfunktion liefert:

$$L(r)=\frac{9}{5}\cdot r\cdot\left(3-r-\frac{\pi r}{2}\right)+\frac{13}{40}\cdot\pi r^2=\frac{27}{5}\cdot r-\frac{9}{5}\cdot r^2-\frac{9}{10}\cdot\pi r^2+\frac{13}{40}\cdot\pi r^2=\frac{27}{5}\cdot r-\frac{9}{5}\cdot r^2-\frac{23}{40}\cdot\pi r^2$$

4. *Extremwert bestimmen:*



Gesucht ist nun das Maximum der Zielfunktion.
Der Graph der Funktion zeigt, dass ein Maximum bei einem Radius von ca. 0,8 existiert.
Ein zweites Extremum kann es nicht geben, da die Funktion vom Grad 2 und der Graph damit eine Parabel ist.
Zur genauen Berechnung des Wertes muss die Stelle des Graphen gesucht werden, die eine waagrechte Tangente (Steigung 0) besitzt.

Ableitung der Zielfunktion: $L'(r)=\frac{27}{5}-\frac{18}{5}\cdot r-\frac{23}{20}\cdot\pi r$

Bedingung $L'(r)=0$:

$$\frac{27}{5}-\frac{18}{5}\cdot r-\frac{23}{20}\cdot\pi r=0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{18}{5}+\frac{23}{20}\cdot\pi\right)\cdot r=\frac{27}{5} \;\Rightarrow\; r=\frac{\frac{27}{5}}{\frac{18}{5}+\frac{23}{20}\cdot\pi}\approx 0{,}749$$

Überprüfung auf Maximum oder Minimum:

$L''(r)=-\frac{18}{5}-\frac{23}{20}\cdot\pi<0$, also Maximum.

5. *Beantwortung der Aufgabe*

Aus r lässt sich h berechnen: $h=3-r-\frac{\pi r}{2}=3-0{,}749-\frac{\pi\cdot 0{,}749}{2}\approx 1{,}075$

Der rechteckige Fensterteil muss also die Höhe $h=1{,}075\,m$ und die Breite $2r=1{,}497\,m$ haben.

Die Höhe des gesamten Fensters beträgt $h+r=1{,}824\,m$.