Determinanten

Mit dem Gaußschen Diagonalisierungsverfahren hat man ein Mittel, um lineare Gleichungssysteme mit beliebig vielen Gleichungen lösen zu können. Für das Lösen „per Hand“ ist dieses Verfahren aber oft sehr aufwendig.

Eine Alternative (jedenfalls für lineare Gleichungssysteme mit 2 und 3 Gleichungen) bietet da die Lösung mit Hilfe von Determinanten.

Zur Definition zweireihiger Determinanten:

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned} \quad \text{hat die Lösungen} \quad x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \text{und} \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Man sieht:
- die Nenner der beiden Brüche sind gleich
- die Zähler stimmen mit den Nennern überein bis darauf, dass
  bei x die a_i durch c_i ersetzt sind,
  bei y die b_i durch c_i ersetzt sind.

Diese Strukturähnlichkeit nutzt man zur Definition der Determinanten aus:

Definition: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$,

also: ((links oben) mal (rechts unten)) minus ((rechts oben) mal (links unten))

Den Nenner der Lösungen kann man nun so schreiben:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Einerseits kann man die Differenz der Produkte unmittelbar aus der Determinante ablesen, andererseits lässt sich die Determinante mühelos aus dem Gleichungssystem erstellen: auf der linken Seite lässt man x und y so wie das + weg.

Die Zähler der Lösungen kann man als Determinanten schreiben, wenn man bei x die a_i durch c_i und bei y die b_i durch c_i ersetzt:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad x = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad .$$

D nennt man Nenner-Determinante, D_x und D_y nennt man Zählerdeterminanten.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 8 \\ 2x + 7y &= 1 \end{aligned} \;\Rightarrow\; D = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 35 - (-6) = 41 \quad D_x = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 56 - (-3) = 59$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 16 = -11 \quad \text{, also:} \quad x = \frac{59}{41} \;\; ; \;\; y = \frac{-11}{41}$$

dreireihige Determinanten

Das Gleichungssystem $\begin{array}{c} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{array}$ hat die Lösungen

$$x = \frac{d_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 d_3 + c_1 d_2 b_3 - c_1 b_2 d_3 - b_1 d_2 c_3 - d_1 c_2 b_3}{a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3}$$

$$y = \frac{a_1 d_2 c_3 + d_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 d_3 - c_1 d_2 a_3 - d_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 d_3}{a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3}$$

$$z = \frac{a_1 b_2 d_3 + b_1 d_2 a_3 + d_1 a_2 b_3 - d_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 d_3 - a_1 d_2 b_3}{a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3}$$

Als Lösungsformel ist diese Schreibweise nicht geeignet.
Man definiert deshalb 3-reihige Determinanten und schreibt damit die Lösung einfacher:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad ; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad ; \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Man sieht: die Zähler- und Nennerdeterminanten werden wie bei den 2-reihigen Determinanten gebildet.

Die Berechnung der Determinanten erfolgt nach folgendem Schema (gezeigt für D):
Zunächst fügt man links und rechts neben der Determinante Kopien der Determinante ein:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & b_1 & c_1 & \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_3} & a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

Dann werden die durch Strecken gekennzeichneten Elemente multipliziert, wobei die Produkte der rot-markierten Strecken (von links oben nach rechts unten) addiert und die Produkte der grün-markierten Strecken (von rechts oben nach links unten) subtrahiert werden.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 7 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) \cdot 3 - (-1) \cdot 7 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \cdot 0 - 4 \cdot 3 \cdot 3 =$$

$$0 + 12 + 6 - (-14) - 0 - 36 = 12 + 6 + 14 - 36 = -4$$