Beispielaufgabe zur Produkt- und Kettenregel

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f(x)=(4x^2-2x)^3$.
Gesucht ist der Term der Ableitungsfunktion.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Aufgabe zu lösen

Auf die Lösung mit Hilfe der Formel $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ wird hier verzichtet, da dieses Vorgehen unnötig kompliziert ist.

Gezeigt werden folgende Vorgehensweisen:

1. Ausmultiplizieren des Terms und dann summandenweises Ableiten
2. Anwendung der Produktregel
3. Anwendung der Kettenregel

1. Ausmultiplizieren

$$f(x)=(4x^2-2x)^3=(4x^2-2x)^2\cdot(4x^2-2x)\overset{\text{binomische Formel}}{=}(16x^4-16x^3+4x^2)\cdot(4x^2-2x)=$$
$$64x^6-32x^5-64x^5+32x^4+16x^4-8x^3=64x^6-96x^5+48x^4-8x^3$$

Daraus folgt:

$$f'(x)=384x^5-480x^4+192x^3-24x^2$$

2. Produktregel

$$f(x)=(4x^2-2x)^3=\left[(4x^2-2x)\cdot(4x^2-2x)\right]\cdot(4x^2-2x)$$

Um die Produktregel mit 2 Faktoren anwenden zu können, werden die beiden ersten Klammern zu einem Faktor zusammengefasst. Beim Ableiten dieses Faktors muss wieder die Produktregel angewendet werden:

$$f'(x)=\left[(8x-2)\cdot(4x^2-2x)+(4x^2-2x)\cdot(8x-2)\right]\cdot(4x^2-2x)+\left[(4x^2-2x)\cdot(4x^2-2x)\right]\cdot(8x-2)=$$
$$2\cdot(8x-2)\cdot(4x^2-2x)\cdot(4x^2-2x)+(4x^2-2x)^2\cdot(8x-2)=3\cdot(4x^2-2x)^2\cdot(8x-2)=$$
$$3\cdot(16x^4-16x^3+4x^2)\cdot(8x-2)=3\cdot(128x^5-32x^4-128x^4+32x^3+32x^3-8x^2)=$$
$$3\cdot(128x^5-160x^4+64x^3-8x^2)=384x^5-480x^4+192x^3-24x^2$$

3. Kettenregel

$$f(x)=(4x^2-2x)^3$$

$f'(x)=3\cdot(4x^2-2)^2\cdot(8x-2)$ vergleiche mit der rot geschriebenen Passage bei 2. Produktregel!

Vergleich der Lösungsmethoden:

- Beim Ausmultiplizieren benötigt die Vorbereitung des Terms einigen Rechenaufwand. Das Ableiten erfolgt dann sehr einfach und der Vorteil liegt darin, dass der Ableitungsterm völlig ausmultipliziert vorliegt und somit leicht weiter abgeleitet werden kann.
- Die Kettenregel liefert ohne Vorbereitung das Ergebnis. Es liegt in Form eines Produktes vor, das sich sehr gut eignet, wenn nach Null-Setzen eine Gleichung gelöst werden soll.
- Auf die Produktregel sollte man in diesem Fall verzichten.