2014-12-08 Klausur 2 Kurs 11PH2 Physik

Lösung

Rechne Sie immer mit $\varepsilon_r = 1$ für Luft und für Vakuum.

---

1 Superkondensatoren (Ultracaps) haben sehr geringe Maße, besitzen aber eine sehr große Kapazität im Bereich von $C = 1000\,F$.

1.1 Berechnen Sie, welche Energie W in einem solchen Kondensator gespeichert ist, wenn man ihn mit der Spannung $U = 6\,V$ aufgeladen hat und welche Ladung Q er dann enthält.

Die Energie eines Kondensators berechnet sich aus $W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$.

Damit folgt $W = \frac{1}{2} \cdot 1000\,F \cdot (6\,V)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000\,F \cdot 36\,V^2 = 18000\,J = 18\,kJ$

Mit der Formel $C = \frac{Q}{U}$ *ergibt sich* $Q = C \cdot U = 1000\,F \cdot 6\,V = 6000\,C$.

1.2 Berechnen Sie die Größe der Platten eines Plattenkondensators. Die Platten sollen den Abstand $d = 1\,cm$ haben und der Kondensator soll bei gleicher Spannung die gleiche Ladung speichern können wie ein Ultracap.

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \rightarrow A = \frac{C \cdot d}{\varepsilon_0} = \frac{1000\,F \cdot 0{,}01\,m}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}} = 1{,}13 \cdot 10^{12}\,m^2 = 1.130.000\,km^2 = 1{,}13 \text{ Millionen } km^2$$

Diese Fläche entspricht etwa der 3-fachen Fläche Deutschlands (357.340 km²)!

---

2 Ein Plattenkondensator mit der Plattengröße $A = 10\,000\,cm^2$ enthält nach dem Aufladen mit der Spannung $U = 100\,V$ die Ladung $Q = 8{,}8\,nC$.

2.1 Berechnen Sie den Plattenabstand d des Plattenkondensators.

$$C = \frac{Q}{U} \;;\; C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \rightarrow \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \rightarrow d = \frac{\varepsilon_0 \cdot A \cdot U}{Q} = \frac{8{,}8 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \cdot 1\,m^2 \cdot 100\,V}{8{,}8 \cdot 10^{-9}\,C} = 0{,}1\,m = 10\,cm$$

2.2 Berechnen Sie das elektrische Potential des Punktes, der sich genau in der Mitte zwischen den Platten befindet, wenn das Potential an einer der Platten gleich 0 ist.

Im homogenen Feld eines Plattenkondensators nimmt das Potential entlang der Feldlinien proportional zum Weg zu. Zwischen den Platten besteht die Potentialdifferenz $\Delta\varphi = U = 100\,V$.

Wegen $E = \frac{U}{d} \rightarrow U = E \cdot d$ *gilt* $E \cdot \frac{d}{2} = \frac{U}{2} = 50\,V = \Delta\varphi$. *Da an einer Platte das Potential den Wert 0 haben soll, liegt in der Mitte des Kondensators das Potential* $\varphi = 50\,V$ *an.*

2.3 Das elektrische Potential einer geladenen Kugel ist gegeben durch $\varphi=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}$.

Geben Sie mit Begründung an, wo φ den Wert 0 annimmt.

Da $\varphi\sim\frac{1}{r}$, wird φ zu 0, wenn r gegen Unendlich geht. In unendlich großer Entfernung von der geladenen Kugel wäre also das Potential gleich 0. Im Mittelpunkt der Kugel (bzw. auf der „Oberfläche" einer Kugel mit dem Radius 0) hätte das Potential einen unendlich großen Wert.

2.4 Eine Kugel wird wie der Plattenkondensator mit der Ladung $Q=8{,}8\,nC$ geladen. Berechnen Sie, in welchem Abstand vom Kugelmittelpunkt sich das gleiche Potential befindet wie bei 2.2.
Haben Sie bei 2.2 kein Ergebnis gefunden, rechnen Sie mit $\varphi=20\,V$.

$$\varphi=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r} \rightarrow r=\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\cdot\varphi}=\frac{8{,}8\cdot10^{-9}C}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot50\,V}=1{,}59\,m \text{ bzw. } 3{,}96\,m \text{ bei } \varphi=20\,V$$

---

3 Abgebildet sind zwei voneinander isoliert angebrachte Plattenkondensatoren.
Die Länge jedes Kondensators beträgt $L=30\,cm$, der Plattenabstand $d=20\,cm$.
Man gehe davon aus, dass das Feld zwischen den Platten homogen ist.

3.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass in dem gestrichelt gezeichneten Koordinatensystem die eingetragene Bahn von Elektronen durch die Gleichung $y=\frac{U_C}{4\cdot d\cdot U_B}\cdot x^2$ beschrieben werden kann. $U_C=500\,V$ ist die am linken Plattenkondensator anliegende Spannung, U_B ist die Beschleunigungsspannung.

Die Elektronen besitzen nach Austreten aus der Glühwendel wegen $U=\frac{W}{Q} \rightarrow W=Q\cdot U$ die potentielle Energie $W_{Pot}=e\cdot U$. Diese Energie ist am Ende der Beschleunigungsstrecke in die kinetische Energie $W_{Kin}=\frac{1}{2}\cdot m_e\cdot v_0^2$ umgewandelt worden.

Mit W_{Pot} = W_{Kin} gilt $e\cdot U_B=\frac{1}{2}\cdot m_e\cdot v_0^2 \rightarrow v_0^2=\frac{2\cdot e\cdot U_B}{m_e} \rightarrow v_0=\sqrt{\frac{2\cdot e\cdot U_B}{m_e}}$.

In x-Richtung bewegen sich die Elektronen mit konstanter Geschwindigkeit v_0: $x(t)=v_0\cdot t$

In y-Richtung wirkt im homogenen Feld des Plattenkondensators wegen $E=\frac{F}{Q}$ eine konstante Kraft $F=E\cdot Q \overset{E=\frac{U}{d}}{=} \frac{U_C}{d}\cdot Q \overset{Q=e}{=} \frac{U_C}{d}\cdot e$. Auf Grund der konstanten Kraft F liegt wegen $F=m\cdot a$ eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung a vor. Für die y-Koordinate gilt also die zeitliche Beziehung $y(t)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$. Die zu zeigende Beziehung y(x) erhält man durch Umformungen und Einsetzen der oben genannten Gleichungen:

$$x=v_0\cdot t \rightarrow t=\frac{x}{v_0} \rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{x^2}{v_0^2} \overset{F=m_e\cdot a \,\rightarrow\, a=\frac{F}{m_e}}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{F}{m_e}\cdot\frac{x^2}{v_0^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{U_C}{d}\cdot e}{m_e}\cdot\frac{x^2}{v_0^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{U_C}{d}\cdot e}{m_e}\cdot\frac{x^2}{\frac{2\cdot e\cdot U_B}{m_e}} \rightarrow$$

$$y=\frac{U_C\cdot e\cdot x^2\cdot m_e}{2\cdot m_e\cdot d\cdot 2\cdot e\cdot U_B}=\frac{U_C}{4\cdot d\cdot U_B}\cdot x^2 \quad \text{q.e.d.}$$

3.2 Berechnen Sie die Geschwindigkeit v, die die Elektronen beim Eintritt in den Kondensator besitzen müssen, damit sie beim Verlassen des ersten Kondensators wie eingezeichnet um 5 cm angehoben worden sind.

Der Austrittspunkt aus dem Feld des linken Plattenkondensators hat die Koordinaten (30cm/5cm), bzw. (0,3m/0,05m).

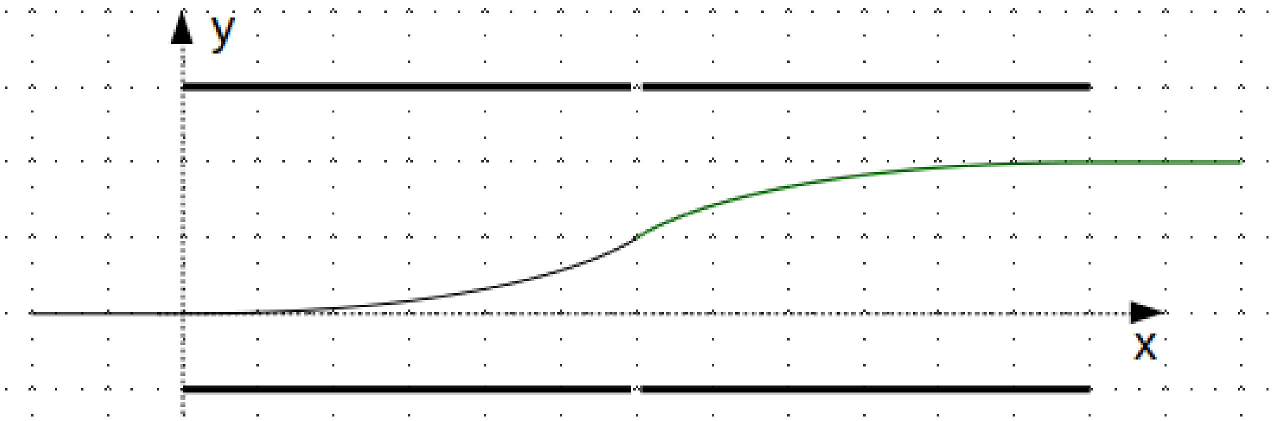
Als Teilergebnis ergab sich in 3.1 die Gleichung $y=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{U_C}{d}\cdot e}{m_e}\cdot\frac{x^2}{v_0^2}=\frac{U_C\cdot e\cdot x^2}{2\cdot d\cdot m_e\cdot v_0^2}$.

Es folgt für die Geschwindigkeit $v_0=\sqrt{\frac{U_C\cdot e\cdot x^2}{2\cdot d\cdot m_e\cdot y}}=\sqrt{\frac{500\,V\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}C\cdot 0{,}3^2 m^2}{2\cdot 0{,}2\,m\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}kg\cdot 0{,}05\,m}}\approx 2\cdot 10^7\frac{m}{s}$

Anmerkung: Hat man 3.1 nicht lösen können, kann man zur Berechnung von v_0 die gegebene Gleichung $y=\frac{U_C}{4\cdot d\cdot U_B}\cdot x^2$ *mit der leicht herzuleitenden Beziehung* $e\cdot U_B=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_0^2$ *kombinieren.*

3.3 Am rechten Kondensator liegt die gleiche Spannung an wie am linken Kondensator, allerdings mit entgegengesetzter Polung.
Berechnen Sie oder geben Sie mit Begründung an, in welcher Höhe die Elektronen den rechten Kondensator nach rechts verlassen und unter welchem Winkel zur x-Achse sie weiterfliegen.

Die Aufenthaltsdauer ist im rechten Kondensator wegen $x=v_0\cdot t$ *genau so lang wie im linken Kondensator. Die Kraft F in y-Richtung wirkt deshalb für den gleichen Zeitraum wie im linken Kondensator, nur jetzt in die andere Richtung. Beim Austritt aus dem 2. Kondensator ist deshalb die Geschwindigkeit in y-Richtung gleich 0. Die Bahnkurven im linken und rechten Kondensator sind punktsymmetrisch zum Punkt (0,3m/0,05m). Damit tritt der Elektronenstrahl 10 cm oberhalb der x-Achse aus dem rechten Kondensator aus und bewegt sich danach parallel (also Winkel 0°) zur x-Achse.*



Die Funktionsgleichung für die Bahnkurve im 2. Kondensator kann man beschreiben durch die Gleichung $y=-\frac{U_C}{4\cdot d\cdot U_B}\cdot(x-0{,}6\,m)^2+0{,}1\,m$.

Diese Formeln dürfen ohne Herleitung benutzt werden.
Alle anderen Formeln müssen hergeleitet werden.

$E=\frac{F}{Q}$ $\sigma=\frac{Q}{A}$ $\sigma=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot E$ $C=\frac{Q}{U}$ $C=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\frac{A}{d}$ $W=\frac{1}{2}\cdot C\cdot U^2$ $I=\dot{Q}\left(\approx\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)$

$F=m\cdot a$ $s=v\cdot t$ $s=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$ $v=a\cdot t$ $W_{Pot}=m\cdot g\cdot h$ $W_{Kin}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$

$E=\frac{U}{d}$ $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$ $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}$ $U=\Delta\varphi=\frac{\Delta W}{Q}$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!