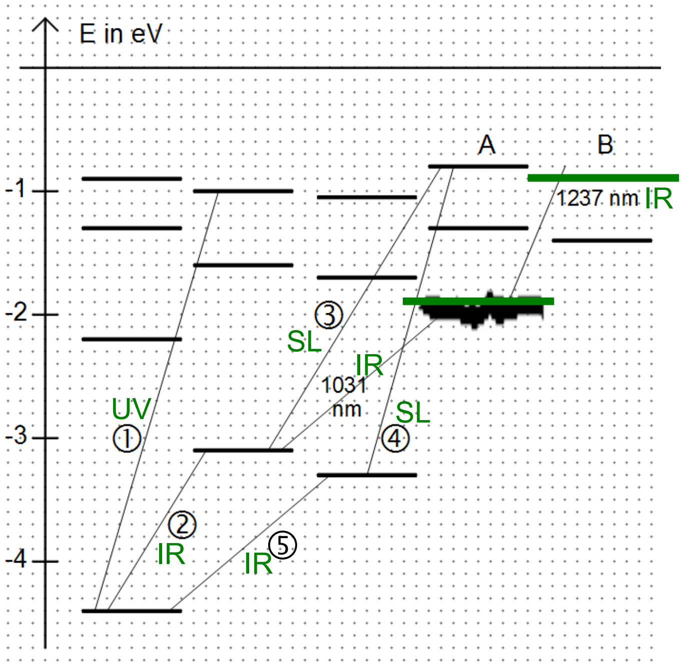
Lösung

1 In nebenstehendem Termschema eines fiktiven Elements My sind einige Übergänge eingezeichnet.
Zu 2 Übergängen sind die zugehörigen Wellenlängen notiert.



a) Berechnen Sie die Wellenlängen für die restlichen eingezeichneten fünf Übergänge.

zu 1: $\Delta E = 3{,}4\,eV = \frac{h \cdot c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{3{,}4\,eV} =$

$$\frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,Js \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{3{,}4 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,J} = \frac{1{,}240 \cdot 10^{-6}}{3{,}4}\,m =$$

$3{,}647 \cdot 10^{-7}\,m = 364{,}7\,nm$

zu 2: $\lambda = \frac{1{,}240 \cdot 10^{-6}}{1{,}3}\,m = 9{,}538 \cdot 10^{-7}\,m = 953{,}8\,nm$

zu 3: $\lambda = \frac{1{,}240 \cdot 10^{-6}}{2{,}3}\,m = 5{,}391 \cdot 10^{-7}\,m = 539{,}1\,nm$

zu 4: $\lambda = \frac{1{,}240 \cdot 10^{-6}}{2{,}5}\,m = 4{,}960 \cdot 10^{-7}\,m = 496{,}0\,nm$

zu 5: $\lambda = \frac{1{,}240 \cdot 10^{-6}}{1{,}1}\,m = 1{,}127 \cdot 10^{-6}\,m = 1127\,nm$

b) Sichtbares Licht hat Wellenlängen im Bereich 380 nm bis 780 nm.
Kennzeichnen Sie alle Übergänge entsprechend durch
SL (sichtbares Licht),
IR (Infrarot-Licht),
UV (Ultraviolett-Licht).

c) Die Lage eines Energieniveaus ist durch Radieren und Ausbessern mit Filzstift unkenntlich geworden. Berechnen Sie die Energie für dieses Energieniveau.

$$\Delta E = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{1{,}986 \cdot 10^{-25}\,Jm}{1031 \cdot 10^{-9}\,m} = 1{,}927 \cdot 10^{-19}\,J = \frac{1{,}927 \cdot 10^{-19}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}}\,eV = 1{,}2\,eV \rightarrow$$

$E_{gesucht} = -3{,}1\,eV + 1{,}2\,eV = -1{,}9\,eV$

d) Die Lage des Energieniveaus B ist gar nicht eingezeichnet worden. Entscheiden Sie durch Rechnung, ob zu den Energieniveaus A und B dieselbe Energie gehört.

$$\Delta E = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{1{,}986 \cdot 10^{-25}\,Jm}{1237 \cdot 10^{-9}\,m} = 1{,}606 \cdot 10^{-19}\,J = \frac{1{,}606 \cdot 10^{-19}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}}\,eV = 1{,}0\,eV \rightarrow$$

$E_B = -1{,}9\,eV + 1{,}0\,eV = -0{,}9\,eV$

Da $E_A = -0{,}8\,eV$ und $E_B = -0{,}9\,eV$, gehören zu den beiden Energieniveaus unterschiedliche Energien.

2 Nach dem Bohrschen Atommodell kreisen Elektronen mit festen kinetischen Energien auf Bahnen um den Atomkern herum. Die Bahnen sind dadurch festgelegt, dass sich die Elektronen, als Welle betrachtet, nicht selbst auslöschen dürfen.

Im Wasserstoffatom sind die Elektronen auf der innersten Bahn im Energiezustand 13,6 eV. Berechnen Sie mit Hilfe dieses Wertes den Durchmesser des Wasserstoffatoms im Grundzustand, wenn man davon ausgeht, dass der Atomdurchmesser durch den Durchmesser der Elektronenbahn gegeben ist.

Nimmt man an, dass auf der innersten Bahn die Wellenlänge des Elektrons am größten ist, so sollte gerade eine Wellenlänge so lang wie der Umfang der Elektronenbahn sein: $\lambda = 2 \cdot \pi \cdot r$ *.*

Für die Wellenlänge des Elektrons gilt nach de Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$ *. Und für die (kinetische) Energie des Elektrons gilt* $E = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 \overset{p=m_e \cdot v}{=} \frac{p^2}{2 \cdot m_e} \rightarrow p^2 = 2 \cdot m_e \cdot E \rightarrow p = \sqrt{2 \cdot m_e \cdot E} \rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot E}} \rightarrow$

$$\lambda = 2 \cdot \pi \cdot r \rightarrow r = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi} = \frac{h}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot m_e \cdot E}} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} Js}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} kg \cdot 13{,}6 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} J}} = 5{,}293 \cdot 10^{-11} m$$

Der Durchmesser d der Elektronenbahn und damit der Durchmesser des Atoms ist damit $d = 2 \cdot r = 2 \cdot 5{,}293 \cdot 10^{-11} m = 1{,}0586 \cdot 10^{-10} m$

---

3 Nach dem Modell des linearen Potentialtopfes mit unendlich hohen Wänden ergibt sich als Abhängigkeit zwischen der Energie E_n der Elektronen und dem Anregungsniveau n folgende Proportionalität: $E_n \sim n^2$.

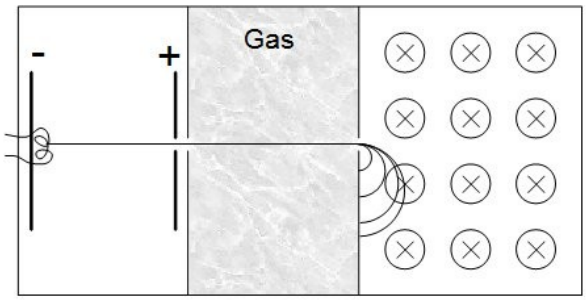
Geben Sie an, welche Proportionalität in Wirklichkeit gilt und geben Sie weiter mit Begründung an, mit welchem Modell das Modell des linearen Potentialtopfes erweitert werden muss, damit sich das richtige Ergebnis ergibt.

In Wirklichkeit ändert sich E mit $\frac{1}{n^2}$ *.*

Beim linearen Potenzialtopf geht man nur davon aus, dass das Elektron auf kleinem Raum eingesperrt ist. Nicht berücksichtigt wird, dass es eine negative Ladung trägt, die mit dem positiven Atomkern wechselwirkt. Man muss also auch noch die Kraft zwischen einer punktförmigen positiven und einer punktförmigen negativen Ladung berücksichtigen, also das Coulombsche Kraftgesetz $F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ *.*

---

4 In einer geschlossenen Apparatur (siehe Abbildung) befinden sich 3 Kammern, die durch schmale Öffnungen miteinander verbunden sind.
In der linken evakuierten Kammer werden Elektronen mit einer Spannung bis zu U_B=200 V beschleunigt.
In der mittleren Kammer befindet sich ein Gas, das nicht durch die Öffnungen gelangen kann.



Die rechte Kammer ist auch evakuiert. Dort wirkt ein Magnetfeld der Flussdichte B=1 mT auf die Elektronen ein. Die Elektronen werden auf Kreisbahnen bis zur Wand der Kammer geführt. Sie treffen je nach Beschleunigungsspannung an verschiedenen Orten unterhalb der Öffnung auf, die meisten jedoch nicht weiter als d=3 cm von der Öffnung entfernt. Jenseits der 3-cm-Grenze treffen nur noch wenige Elektronen auf.

a) Berechnen Sie, wie weit von der Öffnung entfernt die Elektronen an der Wand eigentlich auftreffen müssten, wenn sie mit der Spannung U_B=200 V beschleunigt werden.

Würde in der mittleren Kammer kein Gas sein, hinge der Auftreffort von der Beschleunigungsspannung ab:

Die Energie $E_e = e \cdot U_B$ *, die die Elektronen durch die Beschleunigungsspannung erhalten, wird in Form kinetischer Energie* $E_{Kin} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2$ *gespeichert.*

Im Magnetfeld wirkt die Lorentzkraft $F_L = e \cdot v \cdot B$ *auf die Elektronen. Die Lorentzkraft zeigt sich als Zentripetalkraft* $F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r}$ *und führt die Elektronen auf einer Kreisbahn entlang.*

Durch Kombination der Formeln erhält man

$$E_e = E_{Kin} \rightarrow e \cdot U_B = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 \rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot e \cdot U_B}{m_e} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_B}{m_e}}$$

$$F_L = F_Z \rightarrow e \cdot v \cdot B = m_e \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow r = \frac{m_e}{e \cdot B} \cdot v = \frac{m_e}{e \cdot B} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U_B}{m_e}} = \sqrt{\frac{m_e^2 \cdot 2 \cdot e \cdot U_B}{e^2 \cdot B^2 \cdot m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot m_e \cdot U_B}{e \cdot B^2}} \rightarrow$$

$$r = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31} kg \cdot 200\, V}{1{,}602 \cdot 10^{-19} C \cdot 10^{-6}\, T^2}} = \sqrt{0{,}00227}\, m = 0{,}04769\, m \approx 4{,}77\, cm$$

Der Auftreffort an der Wand müsste ohne Berücksichtigung der mittleren Kammer $d = 2 \cdot r = 9{,}54\, cm$ *von der Blendenöffnung entfernt liegen.*

b) Geben Sie mit Begründung eine Erklärung dafür, dass die Elektronen fast alle innerhalb des 3-cm-Bereichs auf der Wand auftreffen.

Offensichtlich verlieren die Elektronen Energie, so dass der Auftreffpunkt näher an der Blende liegt. Denn nach der hergeleiteten Formel gilt $r \sim \sqrt{U_B}$ *und eine kleinere Energie wirkt sich aus wie eine kleinere Beschleunigungsspannung. Die Energie werden die Elektronen in der mittleren gasgefüllten Kammer bei Anregungsprozessen (wie beim Franck-Hertz-Versuch gesehen) verloren haben.*

c) Bestimmen Sie rechnerisch eine Größe mit Zahlenwert und Einheit und damit eine Eigenschaft des Gases in der mittleren Kammer, die zu diesem Versuchsergebnis führt.

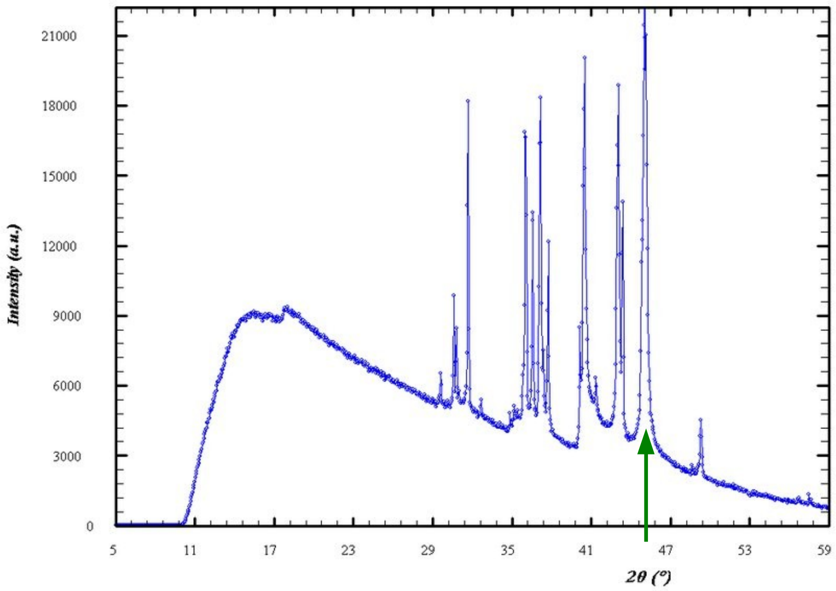
Da die meisten Elektronen höchstens $d = 3 cm \rightarrow r = 1{,}5 cm$ *von der Blendenöffnung entfernt auftreffen, beträgt die Energie, mit der die Gasteilchen angeregt werden können, so viel (oder mehr) wie (bzw. als) benötigt wird, um die Elektronen bei d=3 cm auftreffen zu lassen. Denn alle Elektronen, die eigentlich weiter entfernt auftreffen würden, verlieren Energie in der mittleren Kammer.*

Berechnung der zum Radius $r = 1{,}5 cm$ *gehörenden Energie:*

$$r = \sqrt{\frac{2 \cdot m_e \cdot U_B}{e \cdot B^2}} \rightarrow r^2 = \frac{2 \cdot m_e \cdot U_B}{e \cdot B^2} \rightarrow U_B = \frac{e \cdot B^2}{2 \cdot m_e} \cdot r^2 = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}} \cdot (0{,}015)^2 V \approx 19{,}8\, V$$

Wegen $E_e = e \cdot U_B$ *besitzen die Gasatome also ein Anregungsniveau von 19,8 eV.*

5 Nebenstehend ist das Röntgenspektrum einer alten Röhre mit Kupferanode abgebildet.



Quelle: Wikimedia Commons

a) Erklären Sie, aus welchen zwei grundlegenden Bestandteilen sich der Messgraph zusammensetzt.

Der breite Untergrund zeigt das kontinuierliche Bremsspektrum der Röntgenstrahlung (erzeugt durch Umwandlung der beim Abbremsen der Elektronen in der Anode freigesetzen Energie in Strahlungsenergie). Die Spitzen (Peaks) gehören zum charakteristischen Spektrum der Röntgenstrahlung (erzeugt durch Anregung der Kupferatome in der Anode).

b) Geben Sie mit Begründung an, welcher Peak zur niedrigsten Anregungsenergie des Kupfers gehört.
(Hilfestellung: Es sind nicht die beiden Peaks bei 29° und bei 49°.)

Aus den Formeln $E=h\cdot f$; $c=f\cdot\lambda$; $2\cdot d\cdot\sin\alpha=n\cdot\lambda$ *(Herleitung unter d) ergibt sich:*

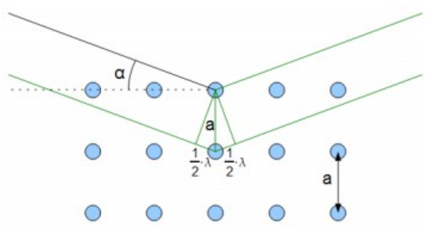
$\sin\alpha=\frac{n\cdot\lambda}{2\cdot d}=\frac{n\cdot c}{2\cdot d\cdot f}=\frac{n\cdot c\cdot h}{2\cdot d\cdot E}$ *, d. h. je größer der Winkel, desto größer die Wellenlänge, desto kleiner die Frequenz, desto kleiner die Energie.*

Die niedrigste Anregungsenergie ist also beim größten Winkel zu finden, also bei $\alpha=44{,}5°$ *.*

c) Im Unterricht haben wir im Spektrum nur 2 hohe Peaks gesehen. Warum sind hier viel mehr Peaks zu sehen?

Die Auflösung dieses Spektrums ist wesentlich besser als die Auflösung, die wir mit unserer Schulröntgenröhre erreichen können. Im „Schulspektrum“ wurden mehrere Peaks jeweils zu einem breiten Peak zusammengefasst.

d) Leiten Sie eine allgemeine Formel her, mit der man die Beschleunigunsspannung der Röntgenröhre aus den Angaben dieses Diagramms berechnen könnte, falls man den Gitterebenenabstand des Bragg-Kristalls kennen würde.



Im reflektierenden Kristall interferieren jeweils 2 parallele Strahlen konstruktiv, wenn der Gangunterschied zwischen den Strahlen ein Vielfaches der Wellenlänge beträgt.

Aus der Zeichnung kann man ablesen: $\sin\alpha=\frac{n\cdot\lambda}{2\cdot a}$

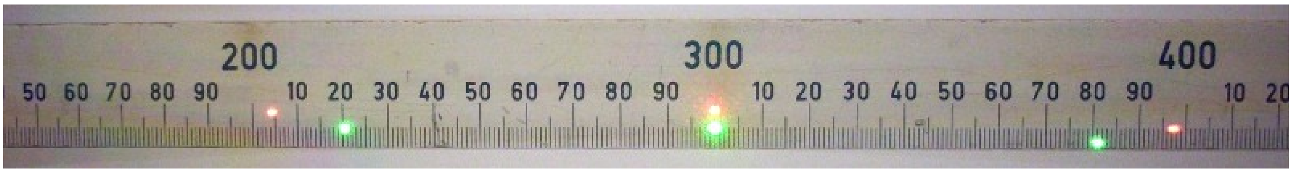
Daraus folgt $n\cdot\lambda=2\cdot a\cdot\sin\alpha$ *.*

Mit $E_e=e\cdot U_B$ *und der Formel* $\sin\alpha=\frac{n\cdot\lambda}{2\cdot d}=\frac{n\cdot c}{2\cdot d\cdot f}=\frac{n\cdot c\cdot h}{2\cdot d\cdot E}$ *aus b) ergibt sich*

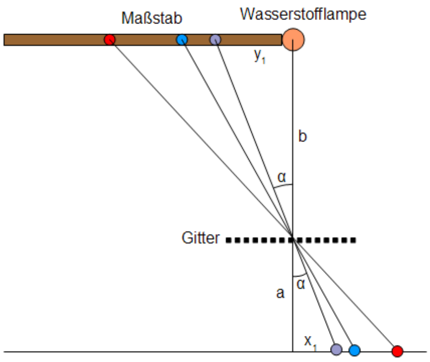
$$\sin\alpha=\frac{n\cdot c\cdot h}{2\cdot a\cdot e\cdot U_B}\ \rightarrow\ U_B=\frac{n\cdot c\cdot h}{2\cdot a\cdot e\cdot\sin\alpha}$$

Setzt man für α den Winkel 10,5° am linken Rand des Bremsspektrums ein (kleinster Winkel → maximale Energie), so erhält man die Beschleunigungsspannung.

6 Ein roter und ein grüner Laserpointer werden so ausgerichtet, dass die beiden Leuchtpunkte auf die 300 mm-Marke eines Maßstabes fallen. Durch ein Gitter betrachtet sieht man dann außer diesen Leuchtpunkten noch weitere rote und grüne Punkte an anderen Stellen des Maßstabes.



a) Leiten Sie mit Bezug auf eine Skizze die Formel für die subjektive Wellenlängenbestimmung mit Hilfe eines Gitters her.

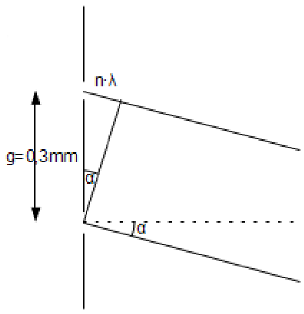


Im Unterricht haben wir nebenstehende Skizze betrachtet. Im Bereich zwischen Gitter und Maßstab gilt folgende Beziehung: $\tan\alpha = \frac{y_1}{b}$

In einer weiteren Skizze hatten wir für den Bereich der Gitteröffnungen die Beziehung $\sin\alpha = \frac{n\cdot\lambda}{g}$ *gefunden.*

Zusammengefasst ergibt sich mit n=1:

$$\lambda = g\cdot\sin\alpha = g\cdot\sin\left(\arctan\frac{y_1}{b}\right)$$



b) Bestimmen Sie die Wellenlänge des roten (oben) und des grünen (unten) Laserlichts.
Der Abstand zwischen Gitter und Messlatte beträgt 290 mm.
Das verwendete Gitter enthält 500 Spalte pro Millimeter.

Beachten Sie, dass trotz Justierung auf den Nullpunkt bei 300 mm leichte Ungenauigkeiten auftreten können. Nutzen Sie alle Messpunkte aus, um ein möglichst genaues Ergebnis zu erhalten.

Die y_1-Werte stimmen rechts und links von der 0-Marke bei 300 mm nicht ganz überein:

$$y_{1-rot-links} = 95{,}5\,mm \;;\; y_{1-rot-rechts} = 97{,}5\,mm \;;\; y_{1-grün-links} = 79{,}5\,mm \;;\; y_{1-grün-rechts} = 81{,}0\,mm$$

Es werden deshalb die Mittelwerte für „links“ und „rechts“ verwendet:

$$y_{1-rot} = 96{,}50\,mm \;;\; y_{1-grün} = 80{,}25\,mm$$

Damit ergeben sich folgende Wellenlängen:

$$\lambda_{rot} = \frac{1}{500}\,mm\cdot\sin\left(\arctan\frac{96{,}50}{290}\right) = 6{,}315\cdot10^{-4}\,mm = 6{,}315\cdot10^{-7}\,m = 631{,}5\,nm$$

$$\lambda_{grün} = \frac{1}{500}\,mm\cdot\sin\left(\arctan\frac{80{,}25}{290}\right) = 5{,}334\cdot10^{-4}\,mm = 5{,}334\cdot10^{-7}\,m = 533{,}4\,nm$$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!