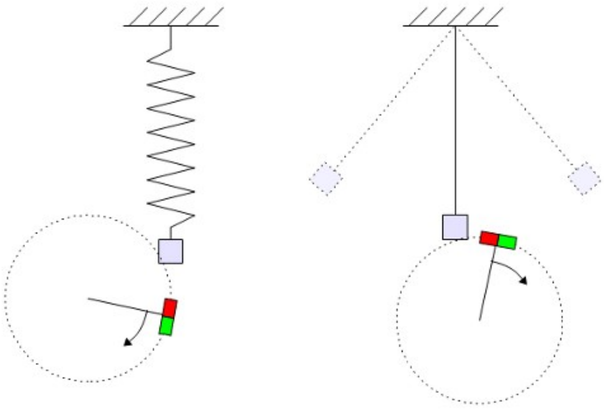
Lösung

1 An einem Masse-Feder-Pendel und an einem Fadenpendel hängt jeweils eine magnetisierbare Masse. Durch einen mit jeweils konstanter (aber möglicherweise unterschiedlicher) Winkelgeschwindigkeit rotierenden Stabmagneten (Radius der Kreisbahn r = 50 cm) werden die Pendel zu Schwingungen angeregt.



Masse-Feder-Pendel: $m=500\,g$; $D=20\,\frac{N}{m}$

Fadenpendel: $m=500\,g$; $L=3\,m$

a) Berechnen Sie für beide Pendel, mit wieviel Umdrehungen pro Minute die Magneten rotieren müssen, damit das jeweilige Pendel über längere Zeit kontinuierlich zu Schwingungen angeregt wird.

Die Pendel werden dann zum Mitschwingen über längere Zeit angeregt, wenn die Schwingungsdauer mit der Dauer für eine Umdrehung des rotierenden Magneten übereinstimmt.

Masse-Feder-Pendel: $T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{0{,}5\,kg}{20\,\frac{N}{m}}}=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{40}\,s^2}\approx 0{,}993\,s\approx 1\,s$

Bei 1 Umdrehung in 1 s muss sich also der Magnet mit 60 Umdrehungen pro Minute drehen.

Fadenpendel: $T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g}}=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{3\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}}=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{3{,}27}\,s^2}\approx 3{,}475\,s\approx 3{,}5\,s$

Bei 1 Umdrehung in 3,5 s muss sich also der Magnet mit $\frac{1}{3{,}5}$ *Umdrehungen in 1 s und damit mit* $60\cdot\frac{1}{3{,}5}\approx 17$ *Umdrehungen pro Minute drehen.*

b) Nachdem die Drehfrequenzen der Magnete geeignet (siehe a)) eingestellt wurden, werden die Schwingungssysteme sich selbst überlassen. Kann es im weiteren Verlauf zur Resonanzkatastrophe kommen? Antwort für beide Schwingungssysteme getrennt mit Begründung.

Masse-Feder-Pendel: Ja, es kann zur Resonanzkatastrophe kommen, weil bei jeder möglichen Amplitude des Masse-Feder-Pendels die Schwingungsdauer konstant bleibt (harmonische Schwingung) und damit ständig Energie vom Dreh-Magneten zum Masse-Feder-Pendel fließen kann.

Fadenpendel: Nein, hier wird es nicht zur Resonanzkatastrophe kommen, da die Schwingungsdauer des Fadenpendels bei großen Amplituden größer wird und damit die Energie vom Dreh-Magneten nicht ständig zum System des Fadenpendels fließen kann. Die notwendige Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$ *zur optimalen Energieübertragung ist für große Amplituden nicht gegeben. Es wird ein ständiges Ansteigen und Abfallen der Amplitude geben.*

2 Ein Masse-Feder-Pendel mit der angehängten Masse m und der Federkonstante $D=10\frac{N}{m}$ führt Schwingungen mit der Schwingungsdauer T aus. Vergrößert man die Masse um 300g, wird die Schwingungsdauer doppelt so groß.

a) Berechnen Sie die Masse m.

Die zusätzlich angehängte Masse sei Δm. Vor Anhängen der Masse Δm schwingt die Feder mit der Schwingungsdauer $T_m=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}$. Nach Anhängen der Masse Δm schwingt die Feder mit der Schwingungsdauer $T_{m+\Delta m}=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m+\Delta m}{D}}$. Wegen der Voraussetzung $T_{m+\Delta m}=2\cdot T_m$ gilt

$$2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m+\Delta m}{D}}=2\cdot2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}} \rightarrow \frac{m+\Delta m}{D}=4\cdot\frac{m}{D} \rightarrow m+\Delta m=4\cdot m \rightarrow \Delta m=3\cdot m \rightarrow m=\frac{\Delta m}{3}\ .$$

Mit m = 300 g = 0,3 kg ergibt sich daraus $m=\frac{0{,}3\,kg}{3}=0{,}1\,kg$.

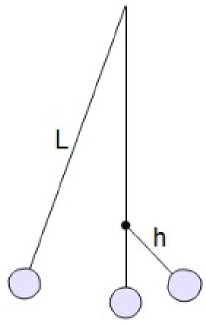
Zu Beginn hat die Feder also mit 100 g angehängter Masse geschwungen.

b) Für jede andere Federkonstante würde sich derselbe Wert für m ergeben. Begründen Sie, warum das so sein muss.

Bei der Rechnung unter a) hebt sich die Federkonstante D heraus. Der Wert von D kann also keinen Einfluss auf den Wert der Masse haben.

---

3 Ein mathematisches Pendel der Länge L = 4m kann nur im linken Bereich ungestört schwingen. Eine Stange senkrecht unterhalb des Aufhängepunktes lenkt das Pendel so um, dass es im rechten Bereich nur noch mit der Länge h schwingen kann. Während ein völlig ungestörtes Pendel der Länge L die Schwingungsdauer T besitzt, schwingt dieses Pendel mit der Schwingungsdauer $\frac{3}{4}\cdot T$. Berechnen Sie die Länge h.



Bei einer Fadenlänge von L schwingt das Fadenpendel mit der Schwingungsdauer $T_L=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g}}$, bei der Fadenlänge h dagegen mit der Schwingungsdauer $T_h=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{h}{g}}$.

In der beschriebenen Situation schwingt das Fadenpendel mit der Schwingungsdauer

$T_{Lh}=\frac{1}{2}\cdot T_L+\frac{1}{2}\cdot T_h=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g}}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{h}{g}}=\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{L}{g}}+\sqrt{\frac{h}{g}}\right)$ *Mit der Bedingung* $T_{Lh}=\frac{3}{4}\cdot T_L$ *gilt*

$$\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{L}{g}}+\sqrt{\frac{h}{g}}\right)=\frac{3}{4}\cdot2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow \sqrt{\frac{L}{g}}+\sqrt{\frac{h}{g}}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow \sqrt{\frac{h}{g}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow \frac{h}{g}=\frac{L}{4\cdot g} \rightarrow h=\frac{L}{4}$$

Mit L = 4 m ergibt sich also $h=\frac{4\,m}{4}=1\,m$.

4 Zwei Schwingungen mit den Schwingungsgleichungen $s_1(t)=s_{m1}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T_1}\cdot t\right)$ und $s_2(t)=s_{m2}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T_2}\cdot t\right)$ mit den Auslenkungen $s_1(t)$ und $s_2(t)$ überlagern sich.

Bekannt sind folgende Werte: $s_{m1}=30cm$, $s_{m2}=20cm$, $T_1=3s$.

Zur Zeit $t=24s$ gilt $s(t)=s_1(t)+s_2(t)=10cm$.

a) Berechnen Sie eine mögliche Schwingungsdauer T_2 .

Die Gleichung der überlagerten Schwingung ist $s(t)=s_1(t)+s_2(t)=s_{m1}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T_1}\cdot t\right)+s_{m2}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T_2}\cdot t\right)$

Gegebene Werte einsetzen: $10\,cm=30\,cm\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3\,s}\cdot 24\,s\right)+20\,cm\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T_2}\cdot 24\,s\right)\rightarrow$

$1=3\cdot\sin(16\cdot\pi)+2\cdot\sin\left(\frac{48\,s\cdot\pi}{T_2}\right)=0+2\cdot\sin\left(\frac{48\,s\cdot\pi}{T_2}\right)\rightarrow\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{48\,s\cdot\pi}{T_2}\right)\rightarrow\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{48\,s\cdot\pi}{T_2}\rightarrow$

$T_2=\frac{48\,s\cdot\pi}{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{48\,s\cdot\pi}{\frac{\pi}{6}}=48\,s\cdot 6=288\,s$. *Die gesuchte Schwingungsdauer T_2 beträgt also 288 s.*

b) Geben Sie einen Zeitpunkt t mit $(t\neq 0)$ an, für den gilt $s(t)=0$.

Da nur eine spezielle Lösung gesucht ist, reicht es, einen t-Wert zu finden, bei dem die Argumente des Sinus in der Schwingungsgleichung ein Vielfaches von 2π annehmen.

Da $T_2=288\,s=3\cdot 96\,s$ *, reicht es, eine Lösung für den Term mit T_2 zu finden, da dann automatisch wegen T_1=3s auch der Term für T_1 ein Vielfaches von 2π ergibt. Wählt man t=288s, so folgt*

$s(288\,s)=s_{m1}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3\,s}\cdot 288\,s\right)+s_{m2}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{288\,s}\cdot 288\,s\right)=s_{m1}\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 96)+s_{m2}\cdot\sin(2\cdot\pi)=0$

Zur Zeit t=288s ist also die Auslenkung gleich 0.

---

5 Erdbebenwellen breiten sich als P-Wellen (Longitudinalwellen) und als S-Wellen (Transversalwellen) aus. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten betragen etwa $c_P=6000\frac{m}{s}$ für P-Wellen und $c_S=3500\frac{m}{s}$ für S-Wellen.

Die Frequenz der Erdbebenwellen betrage etwa 10Hz.

a) Geben Sie die Wellengleichungen für beide Wellenarten an. (Amplitude 2m).

Für die Schwingungsgleichungen werden die Werte für T und λ benötigt.

Wegen $s=v\cdot t\rightarrow\lambda=c\cdot T$ *und* $T=\frac{1}{f}$ *gilt* $T=\frac{1}{10\,Hz}=0{,}1\,s$ *und* $\lambda_P=c_P\cdot T=6000\frac{m}{s}\cdot 0{,}1\,s=600\,m$ *und* $\lambda_S=c_S\cdot T=3500\frac{m}{s}\cdot 0{,}1\,s=350\,m$. *Daraus folgen die Wellengleichungen*

$s_P(x,t)=2\,m\cdot\sin\left(2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}1\,s}-\frac{x}{600\,m}\right)\right)$ *und* $s_S(x,t)=2m\cdot\sin\left(2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}1\,s}-\frac{x}{350\,m}\right)\right)$.

b) In einer Sendung zum aktuellen Erdbeben in Japan wurde gezeigt, dass mit Hilfe der für Menschen und Gebäude unschädlichen P-Wellen ein Alarm gegeben werden kann, bevor die zerstörerischen S-Wellen ankommen. In einem Test wurde eine Warnzeit von 10s angenommen.
Berechnen Sie daraus die Entfernung zum Erdbebenherd.

Die Entfernung des Erdbebenherdes sei x. Die S-Wellen benötigen 10s mehr Zeit, um diese Strecke x zurückzulegen als die P-Wellen. Es gilt also $s=v\cdot t \rightarrow x=c_P\cdot t=c_S\cdot(t+10s) \rightarrow$

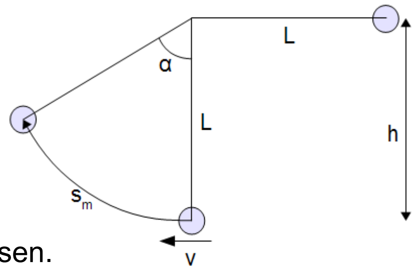
$$c_P\cdot t=c_S\cdot t+c_S\cdot 10\text{s} \rightarrow c_P\cdot t-c_S\cdot t=c_S\cdot 10\text{s} \rightarrow t\cdot(c_P-c_S)=c_S\cdot 10s \rightarrow t=\frac{c_S\cdot 10\text{s}}{c_P-c_S}=\frac{3500\cdot 10\text{s}}{6000-3500}$$

$$t=\frac{c_S\cdot 10\text{s}}{c_P-c_S}=\frac{3500\cdot 10\text{s}}{6000-3500}=\frac{35000}{2500}s=14s \rightarrow x=c_P\cdot t=6000\frac{m}{s}\cdot 14s=84000\text{m}=84\,km$$

Der Erdbebenherd ist also 84km entfernt.

---

6 Im Unterricht haben wir untersucht, wie groß der Winkel beim Fadenpendel sein darf, damit man noch von einer harmonischen Schwingung sprechen kann. Folgende Überlegung soll uns bei der Entscheidung der Frage helfen:



Ein Fadenpendel der Länge L=2m mit der punktförmigen Pendelmasse m=1kg wird um 90° ausgelenkt und dann losgelassen.

a) Zeigen Sie, dass sich die Geschwindigkeit im tiefsten Punkt der Pendelbahn berechnet aus $v=\sqrt{2\cdot g\cdot h}$.

Bei einer Auslenkung von 90° besitzt das Pendel eine Höhe von h=L und damit eine potenzielle Energie von $E_{Pot}=m\cdot g\cdot h=m\cdot g\cdot L$ *, die beim Herunterschwingen im tiefsten Punkt vollständig in kinetische Energie* $E_{Kin}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$ *umgewandelt wird:* $m\cdot g\cdot L=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \rightarrow v^2=2\cdot g\cdot L \rightarrow v=\sqrt{2\cdot g\cdot L}$

b) Gehen Sie nun davon aus, dass die Schwingung harmonisch ist und berechnen Sie mit Hilfe der ermittelten Geschwindigkeit v, um welchen maximalen Winkel α das Pendel zur linken Seite ausgelenkt wird. s_m ist dabei die Länge des zurückgelegten Kreisbogens.

Bei einer harmonischen Schwingung gelten für die Auslenkung und die Geschwindigkeit die Formeln $s(t)=s_m\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right)$; $v(t)=s'(t)=s_m\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right)=v_m\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right)$.

v_m ist die maximale Geschwindigkeit, die im tiefsten Punkt angenommen wird und deren Wert in a) berechnet wurde: $s_m\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}=v_m=\sqrt{2\cdot g\cdot L}$ *. Mit* $T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g}}$ *(gilt, weil eine harmonische Schwingung vorausgesetzt wird) folgt* $s_m\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}=\sqrt{2\cdot g\cdot L} \rightarrow s_m=\frac{T\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot L}}{2\cdot\pi}=\frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g}}\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot L}}{2\cdot\pi}=\sqrt{2}\cdot L$.

Der Umfang des ganzen Kreises mit dem Radius L beträgt $U=2\cdot\pi\cdot L$.

Wenn zu s_m der Winkel α gehört und zu U der Winkel 2π, so gilt die Verhältnisgleichung

$$\frac{\alpha}{2\cdot\pi}=\frac{\sqrt{2}\cdot L}{2\cdot\pi\cdot L}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\pi} \rightarrow \alpha=\frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{2}\cdot L}{2\cdot\pi\cdot L}=\sqrt{2}\,.$$

$\sqrt{2}$ *im Bogenmaß entspricht* $\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot 180°\approx 81°$.

81° wäre also bei gegebener maximaler Geschwindigkeit der größte Winkel, um den das Pendel ausgelenkt würde.

c) Muss α größer, kleiner oder gleich 90° sein? Kann man hier sagen, dass die Schwingung harmonisch ist? Begründen Sie Ihre Antworten.

Wegen der Energieerhaltung kann die erreichte Höhe maximal h=L betragen, d.h. es kann sich maximal der Winkel 90° ergeben.

Bei Annahme einer harmonischen Schwingung geht man davon aus, dass die Auslenkung in waagrechter Richtung gemessen wird. In Wirklichkeit bewegt sich die Masse aber auf einem Kreisbogen, sodass wegen des Umwegs keine so weite Auslenkung zur Seite erreicht werden kann. Zu einer geringeren Ausdehnung als L zur Seite gehört aber ein kleinerer Winkel als 90°.

Würde bei Auslenkung um 90° eine harmonische Schwingung vorliegen, so müsste sich auch auf der linken Seite ein Auslenkungswinkel von 90° ergeben. Die Rechnung liefert aber nur 81°, also 9° oder 10% weniger. Ob man bei dieser Abweichung noch von einer näherungsweise harmonischen Schwingung sprechen mag, hängt davon ab, mit welcher Genauigkeit man die eigenen Untersuchungen durchführen will.

Formeln:

$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}$ $T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$ $s(t)=s_m\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right)$ $s(x,t)=s_m\cdot\sin\left(2\cdot\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right)$ $\omega=\frac{2\cdot\pi}{T}=\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$

$f=\frac{1}{T}$ $F=D\cdot s$ $F=m\cdot a$ $s=v\cdot t$ $s=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$ $v=a\cdot t$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!