Lösung

1 Ein Federpendel mit der Federkonstante $D=50\frac{N}{m}$ schwingt mit derselben Frequenz wie ein Fadenpendel der Länge $30\,cm$.
Die Feder sei masselos. Die Auslenkung des Fadenpendels sei sehr klein gegenüber seiner Länge. Der Versuch findet auf der Erde statt.

a) Berechnen Sie die an das Federpendel angehängte Masse .

Unter den beschriebenen Bedingungen gilt für die Schwingungsdauer einer Schraubenfeder $T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}$ und für die Schwingungsdauer eines Fadenpendels $T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Bei derselben Frequenz stimmen die Schwingungsdauern überein. Es muss also gelten

$$\frac{m}{D}=\frac{L}{g} \rightarrow m=\frac{L\cdot D}{g}=\frac{0{,}3\,m\cdot 50\frac{N}{m}}{10\frac{m}{s^2}}=1{,}5\,kg\,.$$

<u>Anmerkung:</u> Formt man so um: $\frac{m}{D}=\frac{L}{g} \rightarrow m\cdot g=D\cdot L$, so kann man die linke Seite der Gleichung als Gewichtskraft der Masse ($F=m\cdot g$) und die rechte Seite als die Kraft ($F=D\cdot s$) interpretieren, die notwendig ist, um die Schraubenfeder um die Länge des Fadens auseinanderzuziehen.

Man kann also sagen: Hängt man so viel Masse an eine Schraubenfeder, bis die Schraubenfeder um so weit verlängert ist, wie der Länge des Fadens beim Fadenpendel entspricht, so schwingen die beiden Pendel mit derselben Frequenz.

b) Die beiden Pendel werden nun auf den Mond gebracht ($g_{Mond}\approx\frac{1}{6}\cdot g_{Erde}$).
Geben Sie mit Begründung an, ob ein Pendel und, wenn ja, welches Pendel schneller schwingt oder ob beide Pendel auch auf dem Mond gleich schnell schwingen.

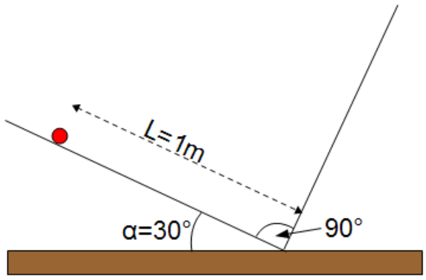
<u>qualitativ:</u> Auf dem Mond ändert sich weder die (träge) Masse m, noch die Federkonstante D und auch nicht die Fadenlänge L. Nur g wird kleiner. Damit vergrößert sich der Bruch $\frac{L}{g}$ und damit auch die Schwingungsdauer T des Fadenpendels. Bei größerer Schwingungsdauer T schwingt das Fadenpendel also langsamer als das Federpendel.

<u>quantitativ:</u> Auf dem Mond gilt für die Schwingungsdauer des Fadenpendels:

$$T_{Mond}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g_{Mond}}}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{\frac{1}{6}\cdot g_{Erde}}}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{6\cdot L}{g_{Erde}}}=\sqrt{6}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g_{Erde}}}=\sqrt{6}\cdot T_{Erde}\approx 2{,}45\cdot T_{Erde}$$

Auf dem Mond ist also die Schwingungsdauer eines Fadenpendels etwa um das 2,45-fache verlängert. Das Federpendel schwingt gleich schnell wie auf der Erde.

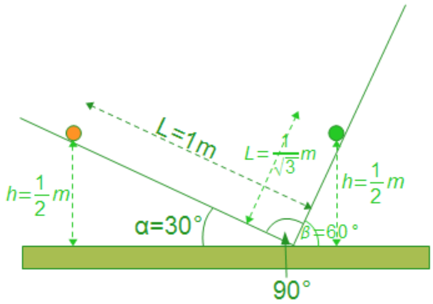
2 Eine sehr kleine Kugel rollt auf zwei Ebenen, die im Winkel von 90° zueinander angeordnet sind, hin und her.
Die eine Ebene bildet mit dem Untergrund den Winkel 30°.
Beim Start wird die Kugel 1m vom untersten Punkt entfernt auf der linken Ebene losgelassen. Am unteren Punkt soll die Kugel durch besondere Vorrichtungen so umgelenkt werden, dass sie durch den Richtungswechsel keine Energie verliert.
Berechnen Sie die Schwingungsdauer der Kugel.



Die rote Kugel startet aus der Höhe 1/2m (wegen $\sin 30° = \frac{h}{L_{links}} = \frac{h}{1} \rightarrow h = \sin 30° = \frac{1}{2}$ *) und erreicht diese Höhe wegen des Energieerhaltungssatzes auch auf der rechten Seite.*

Damit wird auf der rechten Rampe die Strecke $\frac{1}{\sqrt{3}}$ *zurückgelegt*

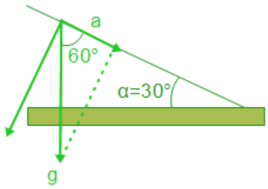
(wegen $\sin 60° = \frac{h}{L_{rechts}} = \frac{\frac{1}{2}}{L_{rechts}} \rightarrow L_{rechts} = \frac{\frac{1}{2}}{\sin 60°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *).*



Auf der linken Rampe bewegt sich die Kugel mit konstanter Beschleunigung. Es gilt also das Weg-Zeit-Gesetz $s = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$ *.*

s ist die Rampenlänge L und a ergibt sich (siehe Skizze) aus

$$\cos\beta = \frac{a}{g} \rightarrow a_{links} = g\cdot\cos\beta = g\cdot\cos 60° = \frac{1}{2}\cdot g = \frac{1}{2}\cdot 10\frac{m}{s^2} = 5\frac{m}{s^2} .$$



Für die Laufzeit auf der linken Rampe ergibt sich also

$$s = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \rightarrow t_{links} = \sqrt{\frac{2\cdot s}{a_{links}}} = \sqrt{\frac{2\cdot L_{links}}{\frac{1}{2}\cdot g}} = \sqrt{\frac{4\cdot L_{links}}{g}} = 2\cdot\sqrt{\frac{L_{links}}{g}} .$$

Diese Zeit gilt sowohl für das Herunter- und Hinaufrollen.

Auf der rechten Seite hat β den Wert 30° und daraus folgt $a_{rechts} = g\cdot\cos 30° = g\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot g$ *.*

Für die Laufzeit folgt $s = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \rightarrow t_{rechts} = \sqrt{\frac{2\cdot s}{a_{rechts}}} = \sqrt{\frac{2\cdot L_{rechts}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot g}} = \sqrt{\frac{4\cdot L_{links}}{\sqrt{3}\cdot g}} = 2\cdot\sqrt{\frac{L_{links}}{\sqrt{3}\cdot g}}$ *.*

Auch rechts gilt die Zeit für das Herunter- und Hinaufrollen.

$$T = 2\cdot t_{links} + 2\cdot t_{rechts} = 4\cdot\sqrt{\frac{L_{links}}{g}} + 4\cdot\sqrt{\frac{L_{rechts}}{\sqrt{3}\cdot g}} = 4\cdot\sqrt{\frac{1}{g}} + 4\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\cdot g}} = 4\cdot\sqrt{\frac{1}{g}} + 4\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\cdot g}} = \frac{4+\frac{4}{\sqrt{3}}}{\sqrt{g}} = \frac{4+\frac{4}{\sqrt{3}}}{\sqrt{10}} \approx 2$$

Die Schwingungsdauer beträgt also etwa 2 Sekunden.

3 Ein Bus ist zur Abfederung von Straßenunebenheiten mit 4 identischen harten Schraubenfedern ausgestattet. Der leere Bus schwingt mit der Schwingungsdauer $T_1 = 1\,s$. Steigen 20 Personen mit einer Masse von je $50\,kg$ zu, so verlängert sich die Schwingungsdauer auf $T_2 = 2\,s$.
Berechnen Sie die Federhärte der Federn.

Die Schwingungsdauer einer Schraubenfeder berechnet sich aus $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$.

M sei die Masse des Busses, die Masse der Personen beträgt $m_P = 20 \cdot 50kg = 1000kg$.

Also gilt $T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{D}}$ *und* $T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M+m_P}{D}}$ *mit* $2 \cdot T_1 = T_2$.

Daraus folgt $T_1^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{M}{D} \rightarrow M = \frac{D \cdot T_1^2}{4\pi^2}$ *und* $T_2^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{M+m_P}{D} \rightarrow M + m_P = \frac{D \cdot T_2^2}{4\pi^2}$.

M einsetzen: $\frac{D \cdot T_1^2}{4\pi^2} + m_P = \frac{D \cdot T_2^2}{4\pi^2} \rightarrow D \cdot \left(\frac{T_2^2}{4\pi^2} - \frac{T_1^2}{4\pi^2} \right) = m_P \rightarrow D = \frac{4\pi^2 m_P}{\left(T_2^2 - T_1^2\right)} = \frac{4\pi^2 \cdot 1000}{(4-1)} \approx 13160$

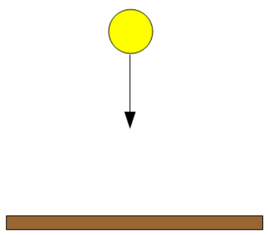
Da das die Federhärte für alle 4 Federn zusammen ist, muss der Wert noch durch 4 dividiert werden: Jede Feder hat also die Federhärte D= $3290 \frac{N}{kg}$.

Anmerkung: Berechnet man zusätzlich noch die Masse des Busses, so ergibt sich dafür ein unrealistisch kleiner Wert: $M = \frac{D \cdot T_1^2}{4\pi^2} \approx 333\,kg$. *Das wurde bei der Stellung dieser Aufgabe in Kauf genommen, um mit einfacheren Werten rechnen zu können.*

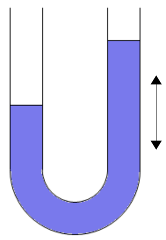
---

4 Geben Sie mit Begründung an, ob in den Fällen a) und b) eine harmonische Schwingung vorliegt.

a) springender Ball



b) Schwingung einer Wassersäule in einem U-Rohr



Eine harmonische Schwingung liegt vor, wenn man die Schwingung durch eine Sinusfunktion beschreiben kann bzw. wenn ein lineares Kraftgesetz vorliegt (d.h. „die Auslenkung ist proportional zur wirkenden Kraft").

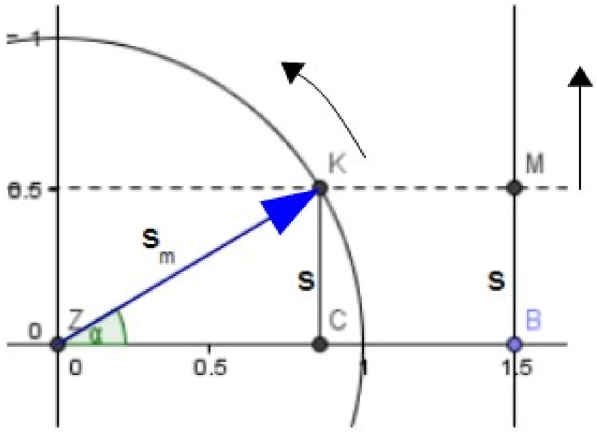
zu a):

Die (Gewichts-)Kraft auf den Ball ist konstant. Es liegt deshalb eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung vor, die durch eine quadratische Funktion ($s \sim t^2$) beschrieben werden kann, also nicht durch eine Sinusfunktion. Die Schwingung ist also nicht harmonisch.

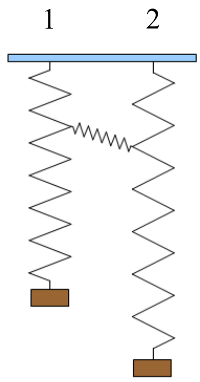
zu b):

Wird die Wassersäule im Rohr von links nach rechts verschoben, so fällt der Wasserspiegel links im selben Maß wie er rechts zunimmt. Die wirkende Rückstellkraft (=Gewichtskraft der in einem Rohrteil überstehenden Wassersäule) wächst proportional zur Länge der überstehenden Wassersäule. Damit liegt hier eine harmonische Schwingung vor.

5 Wir haben im Unterricht gesehen, dass sich die senkrechte Auslenkung s der Masse M eines Federpendels (hier dargestellt durch die Strecke BM) durch die senkrechte Auslenkung s=CK einer kreisenden Masse (hier dargestellt als die Spitze K des Pfeils ZK) beschreiben lässt. Dadurch sind wir zur Schwingungsgleichung $s(t)=s_M \cdot \sin(\omega \cdot t)$ gelangt.
Zu jeder Pfeilrichtung links gehört also ein bestimmter Schwingungszustand rechts.



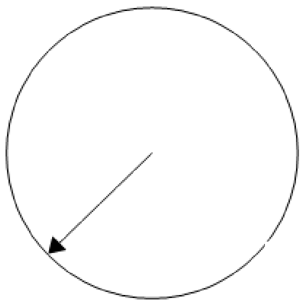
Ein Federpendel 1 mit der Frequenz f_1 soll bestmöglich vom schwach angekoppelten Federpendel 2 mit der Frequenz f_2 angetrieben werden (siehe Skizze).



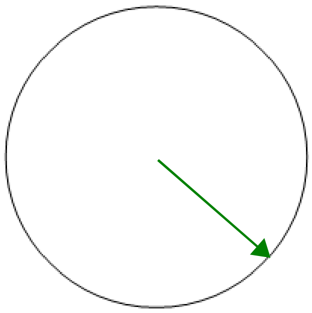
a) Wenn $f_1 = 0{,}5\,Hz$, wie groß muss dann der Wert für f_2 sein?

Auch f_2 muss den Wert 0,5 Hz haben, damit die Energie bestmöglich von Feder 2 auf Feder 1 übergehen kann.

b) Würde man die Schwingungen durch Pfeile (wie in der Abbildung links) darstellen, so soll für das Federpendel 1 das Pfeildiagramm zu einem bestimmten Zeitpunkt so aussehen:

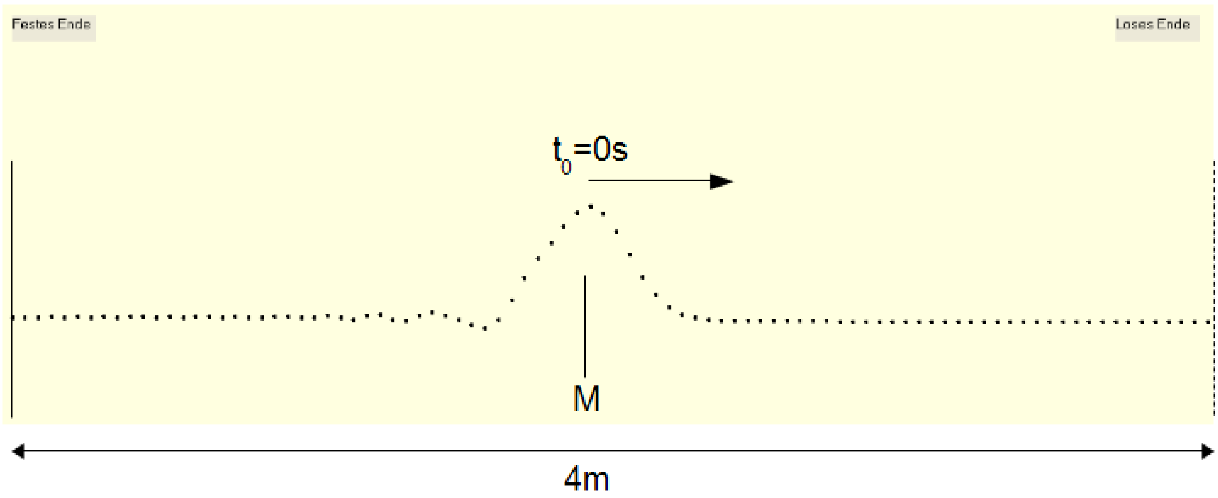


Zeichnen Sie das Pfeildiagramm für das Federpendel 2 für denselben Zeitpunkt.



Das antreibende Pendel muss immer „eher“ als das angetriebene Pendel schwingen. Die Phase des antreibenden Pendels liegt um 90° bzw. π/2 vor der Phase des angetriebenen Pendels. Pendel 2 ist das antreibende Pendel. Daraus folgt:

6



Eine Störung läuft mit der Geschwindigkeit $c=1\frac{m}{s}$ zwischen einem festen Ende (links) und einem losen Ende (rechts) auf einer 4m langen Strecke immer hin und her. Zur Zeit $t_0=0s$ startet der Wellenzug genau in der Mitte M und bewegt sich nach rechts zum losen Ende hin.

Geben Sie die Zeiten t_1 bis t_5 an, zu denen im Punkt M wieder ein Wellenberg vorbei kommt.

Am rechten (losen) Ende wird ein Wellenberg als Wellenberg und ein Wellental als Wellental reflektiert. Am linken (festen) Ende wird ein Wellenberg als Wellental und ein Wellental als Wellenberg reflektiert.

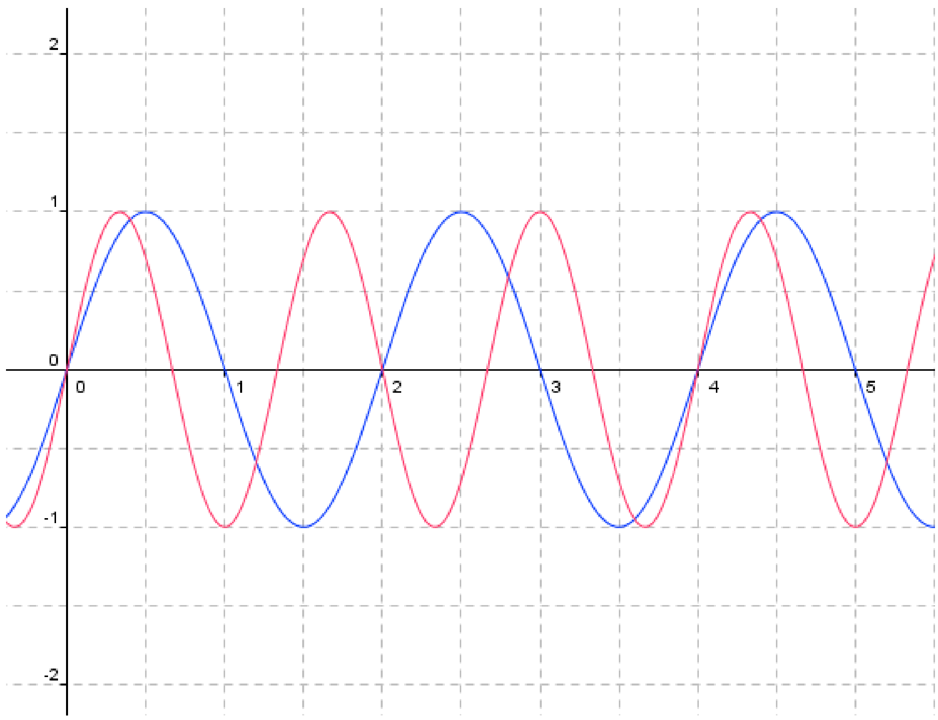
Die Störung legt von der Mitte ausgehend immer 4m zurück, bis sie wieder in der Mitte ankommt. Alle 4s kommt also die Störung in der Mitte an. Zeiten und Art der Störung in der Mitte:

0s	$\xrightarrow{loses\,Ende}$	4s	$\xrightarrow{festes\,Ende}$	8s	$\xrightarrow{loses\,Ende}$	12s	$\xrightarrow{festes\,Ende}$	16s	$\xrightarrow{loses\,Ende}$	20s	$\xrightarrow{festes\,Ende}$	24s	$\xrightarrow{loses\,Ende}$	28s	$\xrightarrow{festes\,Ende}$	32s	$\xrightarrow{loses\,Ende}$	36s
Berg		*Berg*		*Tal*		*Tal*		*Berg*		*Berg*		*Tal*		*Tal*		*Berg*		*Berg*

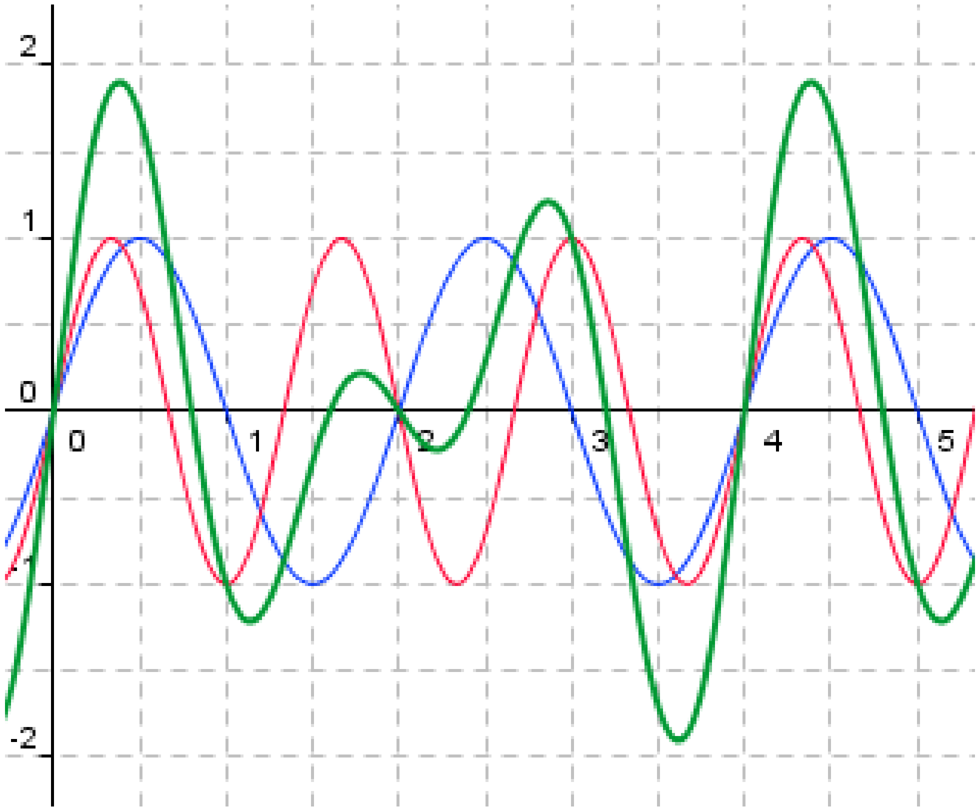
Also gilt: $t_1=4\,s$; $t_2=16\,s$; $t_3=20\,s$; $t_4=32\,s$; $t_5=36\,s$

---

7 Zwei Schwingungen überlagern sich. Skizzieren Sie die Kurve für die überlagerte Schwingung.



Um die Lösungskurve zu finden, muss man die Funktionswerte beider Kurven addieren. Am einfachsten und am genauesten geht das an den Stellen, an denen eine der Kurven die x-Achse schneidet.



Formeln:

$W=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$ $\quad W=m\cdot g\cdot h$ $\quad W=\frac{1}{2}\cdot D\cdot s^2$ $\quad F=m\cdot g$ $\quad U=\frac{W}{Q}$ $\quad E=\frac{U}{d}$ $\quad F=m\cdot a$

$s=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$ $\quad s=v\cdot t$ $\quad v=a\cdot t$ $\quad s(t)=s_M\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$ $\quad E=\frac{F}{Q}$ $\quad B=\frac{F}{Q\cdot v}$ $\quad \sigma=\frac{Q}{A}$

$C=\frac{Q}{U}$ $\quad W=F\cdot s$ $\quad \omega=\frac{2\pi}{T}$ $\quad \alpha=\omega\cdot t$ $\quad F=D\cdot s$ $\quad \sin\alpha=\frac{GK}{HY}$ $\quad \cos\alpha=\frac{AK}{HY}$ $\quad \tan\alpha=\frac{GK}{AK}$

$C=\epsilon_0\cdot\epsilon_r\cdot\frac{A}{d}$ $\quad F=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\epsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}$ $\quad W=\frac{1}{2}\cdot C\cdot U^2$ $\quad R=\rho\cdot\frac{L}{A}$ $\quad U=R\cdot I$ $\quad I=\frac{Q}{t}$

$T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$ $\quad \sigma=\epsilon_0\cdot E$ $\quad F=I\cdot L\cdot B$ $\quad F=m\cdot\frac{v^2}{r}$ $\quad T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}$ $\quad f=\frac{1}{T}$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!