Lösung Version 2007-04-03

1 Eine Stahlkugel der Masse $m=100\,g$ fällt senkrecht auf eine sehr feste Stahlunterlage und springt (bei Fehlen jeglicher Reibungseffekte) bis auf die Ausgangshöhe wieder hoch.
Dieser Vorgang wiederholt sich fortwährend und kann als Schwingung interpretiert werden.

a) Untersuchen Sie, ob dieser Vorgang eine harmonische Schwingung ist.

Da die auf die Kugel wirkende Kraft (Gewichtskraft der Kugel) immer (wenigstens im Labor) konstant ist, kann keine harmonische Schwingung vorliegen, da bei einer harmonischen Schwingung die Kraft proportional zur Auslenkung ist.

b) Stellen Sie eine Formel für die Schwingungsdauer dieser Schwingung auf.

Die Schwingungsdauer setzt sich zusammen aus der Fallzeit t_1 und der gleichlangen Steigzeit t_2.

Die Zeiten ergeben sich aus der Formel für die gleichförmig beschleunigte Bewegung: $s=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$

Für die Fallstrecke ergibt sich $s_1=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t_1^2 \Rightarrow t_1=\sqrt{\frac{2\cdot s_1}{g}}$.

Es gilt $t_1=t_2$. *Damit ergibt sich die Schwingungsdauer zu* $T=t_1+t_2=2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot s_1}{g}}=\sqrt{\frac{8\cdot s_1}{g}}$.

c) Berechnen Sie, aus welcher Höhe die Kugel fallen muss, damit sie im Sekundentakt schwingt (d. h. T = 1 s).

Auflösen nach s_1 liefert mit $g=9{,}81\,\frac{m}{s^2}$: $1=\sqrt{\frac{8\cdot s_1}{g}} \Rightarrow s_1=\frac{1^2\cdot g}{8}$

Mit Einheiten ergibt sich daraus: $s_1=\frac{1\,s^2\cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{8}=1{,}23\,m$

---

2 Zwei Stimmgabeln werden gleichzeitig angeschlagen. Sie schwingen mit unterschiedlichen Frequenzen: f_1 = 440 Hz ; f_2 = 450 Hz.
Durch die Überlagerung der Schwingungen entsteht der Eindruck eines an- und abschwellenden Tones, Schwebung genannt. Berechnen Sie die Dauer einer solchen Schwebung (von einem Lautstärke-Minimum bis zum nächsten Minimum).

Stimmgabel 1 schwingt 440 mal pro Sekunde, Stimmgabel 2 schwingt in der Zeit 450 mal. Schwingen die Stimmgabeln zu Beginn so, dass die Töne sich auslöschen (Zinken schwingen entgegengesetzt), liegt ein Lautstärkeminimum vor. Da Stimmgabel 2 10 mal pro Sekunde mehr schwingt als Stimmgabel 1, tritt eine Auslöschung auch 10 mal pro Sekunde auf. Die Zeit von einem Minimum bis zum nächsten ist also 0,1 s.

Der Wert lässt sich auch so ausrechnen: Dauer einer Schwingung bei Stimmgabel 1 ist $T_1=\frac{1}{f_1}=\frac{1}{440\,s}$ *und bei Stimmgabel 2* $T_2=\frac{1}{f_2}=\frac{1}{450\,s}$. *Sind beide Schwinger zu Beginn in Phase, dann sind sie es wieder nach n Schwingungen von Stimmgabel 1 und (n+1) Schwingungen von Stimmgabel 2:*

$$n\cdot T_1=(n+1)\cdot T_2=n\cdot T_2+T_2 \;\Rightarrow\; n\cdot(T_1-T_2)=T_2 \;\Rightarrow\; n=\frac{T_2}{T_1-T_2}=\frac{\frac{1}{450}s}{\frac{1}{440}s-\frac{1}{450}s}=\frac{1}{450}\cdot\frac{440\cdot450}{450-440}=\frac{440}{10}=44$$

Wenn Stimmgabel 1 also 44 Schwingungen absolviert hat, sind die beiden Schwinger wieder in Phase. Die dazu benötigte Zeit ist $t=44\cdot\frac{1}{440}s=\frac{1}{10}s$

---

3 Zwei Schwingungen überlagern sich. Die Amplituden und die Frequenzen der Schwingungen sind bekannt: $s_{m1}=2\,cm\,;\,f_1=2\,Hz\,;\,s_{m2}=5\,cm\,;\,f_2=1\,Hz$
Schwingung 1 hat die Phasenverschiebung $\varphi=0$.
Berechnen Sie die Phasenverschiebung der Schwingung 2 so, dass zur Zeit t = 10 s die Auslenkung s = 1 cm beträgt.

Die Schwingungsgleichungen der beiden Schwingungen werden addiert:

$$s(t)=s_1(t)+s_2(t)=s_{m1}\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f_1\cdot t+\varphi_1)+s_{m2}\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f_2\cdot t+\varphi_2)$$

Einsetzen der Werte (der Übersichtlichkeit halber ohne Einheiten):

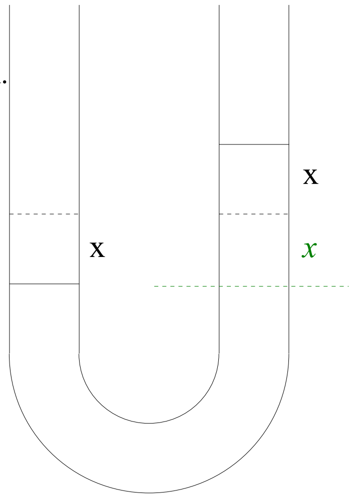
$$1=2\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot2\cdot10+0)+5\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot1\cdot10+\varphi_2) \;\Rightarrow\; 1=2\cdot\sin(40\cdot\pi)+5\cdot\sin(20\cdot\pi+\varphi_2) \;\Rightarrow$$

$1=0+5\cdot\sin(\varphi_2)$ *(Vielfache von 2π (=360°) kann man im Argument eines Sinus durch 0 ersetzen)*

$\sin(\varphi_2)=\frac{1}{5} \;\Rightarrow\; \varphi_2=\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)\approx0{,}201$ *oder* $\varphi_2\approx11{,}54°$

---

4 In einem U-förmig gebogenen Glasrohr mit der Querschnittsfläche 20 cm^2 kann eine Flüssigkeit (Wasser, Dichte $\rho=1\,g/cm^3$, Länge l) frei schwingen. Im Ruhezustand nimmt die Flüssigkeitsobergrenze die gestrichelte Position ein. Wird das Wasser auf einer Seite um x angehoben, sackt es auf der anderen Seite um x ab. Auf Grund des Höhenunterschiedes kommt es dann zu einer Schwingung der Wassersäule.



a) Zeigen Sie, dass eine harmonische Schwingung vorliegen muss.

Die die Schwingung bewirkende Kraft ist die Gewichtskraft der überstehenden Wassersäule. Da die Gewichtskraft proportional zur Länge der Wassersäule ist (das Rohr hat überall den gleichen Querschnitt), ist die Schwingung harmonisch.

b) Zeigen Sie, dass die Formel für die Schwingungsdauer der Wassersäule $T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{2\cdot g}}$ ist.

Gehen Sie dabei von der Formel $T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}$ aus und überlegen Sie sich, was in diesem Fall D ist.

Die Masse der schwingenden Wassersäule mit der Länge l und dem Querschnitt q ist $m=\rho\cdot V=\rho\cdot l\cdot q$ *.*
Die auf einer Seite überstehende Masse Δm ist $\Delta m=\rho\cdot\Delta V=\rho\cdot q\cdot2x$ *und deren Gewichtskraft* F_G *ist*
$F_G=m\cdot g=\rho\cdot q\cdot2x\cdot g$ *. D ist deshalb* $D=\frac{F}{s}=\frac{\rho\cdot q\cdot2x\cdot g}{x}=\rho\cdot q\cdot2\cdot g$ *.*

Also gilt $\frac{m}{D}=\frac{\rho\cdot l\cdot q}{\rho\cdot q\cdot2\cdot g}=\frac{l}{2\cdot g}$ *. Daraus folgt die zu zeigende Formel* $T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{2\cdot g}}$ *.*

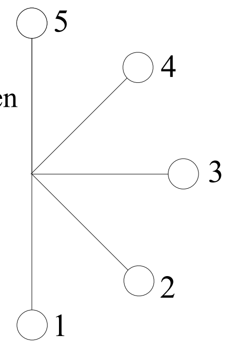
c) Untersuchen Sie an Hand der Formel für die Schwingungsdauer, welche Größen die Schwingung beeinflussen und welche nicht (obwohl man es vielleicht annehmen sollte).

Die Schwingungsdauer hängt nur von der Wassersäulenlänge l und dem Ortsfaktor g ab. Bemerkenswert ist, dass hier die Formel $T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$ *für das Fadenpendel bei kleinen Amplituden zur Anwendung kommt, wenn man die Länge l des Fadens durch die Hälfte der Länge l der Wassersäule ersetzt.*

Nicht abhängig dagegen ist die Schwingungsdauer von der Dichte der Flüssigkeit und damit der schwingenden Masse. Ebenso spielt die maximale Auslenkung der Wassersäule keine Rolle und auch der Querschnitt q des Rohres hat keinen Einfluss auf die Schwingungsdauer T.

---

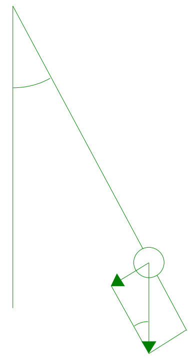
5 Ein mathematisches Pendel (starrer und masseloser Faden, Pendelmasse punktförmig) ist nebenstehend in 5 möglichen Positionen gezeichnet. Die Winkelgrößen zwischen den einzelnen Fäden betragen jeweils 45°.



a) Berechnen Sie für jede der Positionen die rücktreibende Kraft.
Die Gewichtskraft der Kugel beträgt $F_G=10\,N$.
Der Faden hat eine Länge von $L=2\,m$.

In der Skizze erkennt man, dass gilt: $\sin\alpha=\frac{F}{F_G} \Rightarrow F=F_G\cdot\sin\alpha$

Position	Winkel in °	F in N
1	0	0
2	45	$5\cdot\sqrt{2}\approx 7{,}1$
3	90	10
4	135	$5\cdot\sqrt{2}\approx 7{,}1$
5	180	0



b) Tragen Sie die gefundenen Werte in einem Diagramm auf, bei dem auf der waagrechten Achse der Auslenkungs-Winkel und auf der senkrechten Achse die Kraft aufgetragen sind. Verbinden Sie die gefundenen Punkte so, dass die Zwischenwerte die Kraft für weitere Positionen angeben.
Zu welcher mathematischen Funktion gehört der gefundene Graph?

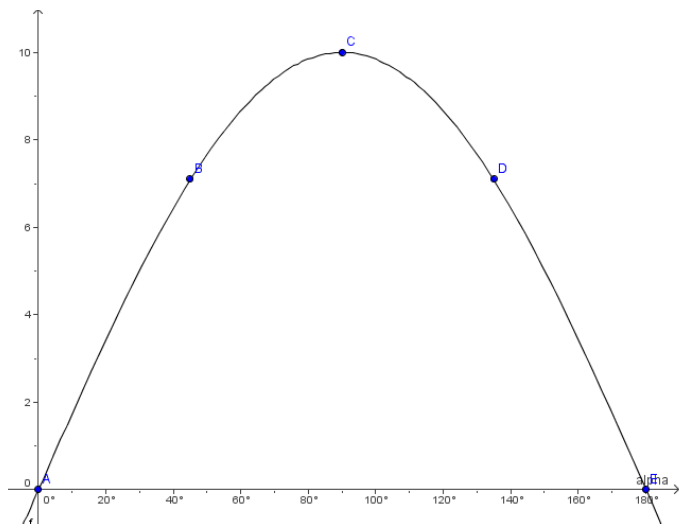
Wie die Formel unter a) zeigt, muss sich eine Sinuskurve ergeben.

Man sieht sehr schön, dass für kleine Winkel die rücktreibende Kraft fast proportional zum Winkel ist, da der Graph dort gut durch eine Gerade angenähert werden kann.

Für größere Winkel (etwa ab 20° zu erkennen) liegt aber eine Proportionalität auch nicht näherungsweise vor.

Der Graph hat die Funktionsgleichung

$f(\alpha)=10\cdot\sin\alpha$



6 Astronauten haben ein „Sekundenpendel“ (eine Schwingung dauert auf der Erde genau 1 s) auf einen Weltraumflug mitgenommen und sind nun auf einem Himmelskörper gelandet. Dort lassen sie das Pendel schwingen und messen die Schwingungsdauer $T=1{,}62\,s$.
Finden Sie durch Berechnung heraus, auf welchem Himmelskörper sich die Astronauten befinden.

Ortsfaktoren auf Himmelskörpern in m/s²	
Merkur	3,82
Venus	8,83
Erde	9,81
Mars	3,73
Mond	1,63

Benötigt wird die Formel für die Schwingungsdauer $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Berechnung der Fadenlänge unter Verwendung des Ortsfaktors g_{Erde} : $l=\frac{T^2\cdot g}{4\pi^2}=\frac{1\cdot 9{,}81}{4\pi^2}\,m\approx 0{,}248\,m$.

Berechnung von $g_{Himmelskörper}$: $g=\frac{4\pi^2\cdot l}{T^2}=\frac{4\pi^2\cdot 0{,}248}{1{,}62^2}\frac{m}{s^2}\approx 3{,}73\frac{m}{s^2}$ *Der Himmelskörper ist also der Mars.*

Allgemeine Rechnung: Da derselbe Faden benutzt wird, gilt $l=\frac{T^2_{Erde}\cdot g_{Erde}}{4\pi^2}=\frac{T^2_{Himmelskörper}\cdot g_{Himmelskörper}}{4\pi^2}$,

also $g_{Himmelskörper}=\frac{T^2_{Erde}}{T^2_{Himmelskörper}}\cdot g_{Erde}=\frac{1}{1{,}62^2}\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}=3{,}74\frac{m}{s^2}$

---

7 Ein Fadenpendel hat die Länge $L=50\,cm$.
Eine mit 50 g belastete (masselose) Schraubenfeder hat eine Schwingungsdauer, die genau halb so groß ist wie die Schwingungsdauer des Fadenpendels.
Berechnen Sie, um wie viel Zentimeter diese Schraubenfeder ausgelenkt wird, wenn man ein 50 g-Massestück daran hängt.

Es gilt $T_{Faden}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}=2\cdot T_{Feder} \Rightarrow \frac{l}{g}=\frac{4\cdot m}{D} \Rightarrow D=\frac{4\cdot m\cdot g}{l}=\frac{4\cdot 0{,}05\cdot 9{,}81}{0{,}5}\frac{N}{m}=3{,}924\frac{N}{m}$

$F=D\cdot s \Rightarrow s=\frac{F}{D}=\frac{m\cdot g}{\frac{4\cdot m\cdot g}{l}}=\frac{m\cdot g\cdot l}{4\cdot m\cdot g}=\frac{l}{4}=\frac{0{,}5}{4}m=\frac{1}{8}m=0{,}125m=12{,}5\,cm$

Formeln:

$s=v\cdot t$ $\quad s=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$ $\quad v=a\cdot t$ $\quad W_{pot}=m\cdot g\cdot h$ $\quad W_{kin}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$ $\quad W_{sp}=\frac{1}{2}\cdot D\cdot s^2$

$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}$ $\quad T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$ $\quad s(t)=s_m\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$ $\quad F=D\cdot s$ $\quad F=m\cdot a$ $\quad f=\frac{1}{T}$

$\omega=\frac{2\cdot\pi}{T}$ $\quad \omega=\frac{\alpha}{t}$

VIEL ERFOLG BEI DER BEARBEITUNG DER AUFGABEN!