Lösung *Version 2007-03-13*

Rechnen Sie in der gesamten Arbeit mit dem Wert $g=10\frac{m}{s^2}$ und vernachlässigen Sie alle Reibungseffekte.

1 Astronauten sind auf einem Himmelskörper gelandet und sollen dort den Ortsfaktor messen.
Dazu lassen sie einen unbewegten Körper $s=3\text{m}$ tief fallen und messen im untersten Punkt der Strecke die Geschwindigkeit $v=4{,}8\frac{m}{s}$.
Berechnen Sie die Fallzeit und finden Sie durch Berechnung heraus, auf welchem Himmelskörper die Astronauten gelandet sind.

Himmelskörper	Ortsfaktor
Erde	9,81
Mond	1,57
Mars	3,83
Venus	8,73

Da es sich um eine beschleunigte Bewegung handelt, gelten die Gleichungen $s=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$ *und* $v=a\cdot t$.

Berechnung der Fallzeit: Der Parameter a muss aus den beiden Gleichungen entfernt werden.

$v=a\cdot t \Rightarrow a=\frac{v}{t} \overset{\text{einsetzen}}{\Rightarrow} s=\frac{1}{2}\cdot\frac{v}{t}\cdot t^2=\frac{1}{2}\cdot v\cdot t \overset{\text{auflösen nach t}}{\Rightarrow} t=\frac{2\cdot s}{v}=\frac{2\cdot 3}{4{,}8}=1{,}25$ *Die Fallzeit beträgt also 1,25s.*

Zeit in Gleichung zur Bestimmung von a einsetzen: $a=\frac{v}{t}=\frac{4{,}8}{1{,}25}=3{,}84$

Die Fallbeschleunigung beträgt $3{,}84\frac{m}{s^2}$. *Die Astronauten befinden sich also auf dem Mars.*

---

2 Mit einer Stahlkugel werden Experimente durchgeführt, bei denen jegliche Reibung vernachlässigbar ist.

a) Auf einer vollkommen ebenen waagrechten Stahlbahn wird eine Stahlkugel mit der Geschwindigkeit $v=2\frac{m}{s}$ vom Koordinatenursprung aus rollen gelassen. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem sich die Kugel nach $5s$ befindet.

Es liegt eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung vor:

$x=v\cdot t=2\cdot 5=10$ *Die Kugel befindet sich nach 5s also 10m vom Koordinatenursprung entfernt am Punkt mit den Koordinaten (10/0).*

b) Die Kugel wird mit $v_y=2\frac{m}{s}$ senkrecht nach oben geworfen.
Berechnen Sie die Zeit t, zu der die Kugel wieder am Abwurfort vorbei kommt.

Senkrechter Wurf nach oben: $x=0; y=-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2+v_y\cdot t=-5\cdot t^2+2\cdot t$

Ist die Kugel am Abwurfort, so gilt y=0. Daraus folgt:

$0=-5\cdot t^2+2\cdot t$ *Da die offensichtliche Lösung t=0 nicht die gesuchte Lösung ist, kann man durch t dividieren:* $0=-5\cdot t+2 \Rightarrow 5\cdot t=2 \Rightarrow t=\frac{2}{5}=0{,}4$

Nach 0,4s ist die Kugel also wieder am Abwurfort angekommen.

c) Die Kugel wird mit $v_y = -2\frac{m}{s}$ senkrecht nach unten geworfen.

Berechnen Sie, wie tief die Kugel nach 2s gefallen ist.

Senkrechter Wurf nach unten: $x=0$; $y=-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2+v_y\cdot t=-5\cdot 2^2-2\cdot 2=-20-4=-24$

Nach 2s ist die Kugel also 24m tief gefallen.

Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Geschwindigkeit der Kugel doppelt so groß ist wie beim Abwurf.

Für die Geschwindigkeit in senkrechter Richtung gilt: $v=-g\cdot t+v_y$ *Es soll sein* $v=2\cdot v_y$ *, also:*

$2\cdot v_y=-g\cdot t+v_y \Rightarrow v_y=-g\cdot t \Rightarrow t=-\frac{v_y}{g}=-\frac{-2}{10}=0{,}2$

Nach 0,2s ist die Geschwindigkeit doppelt so groß wie zu Beginn des senkrechten Wurfs.

d) Wenn 2 Kugeln zur gleichen Zeit abgeworfen werden, die eine mit $2\frac{m}{s}$ senkrecht nach oben und die andere mit $-2\frac{m}{s}$ senkrecht nach unten, was wird dann passieren?

α) Die Kugeln kommen sich mit der Zeit immer näher und stoßen zusammen.
Berechnen Sie in diesem Fall die Zeit bis zum Zusammenprall.

β) Die Kugeln behalten immer denselben Abstand voneinander.
Begründen Sie in diesem Fall ihre Wahl des Falles β).

γ) Die Kugeln entfernen sich ständig voneinander.
Berechnen Sie in diesem Fall die Geschwindigkeit, mit der sich die Kugeln voneinander entfernen.

Für die nach oben geworfene Kugel gilt die Bewegungsgleichung $v_{oben}=-g\cdot t+2\frac{m}{s}$.

Für die nach unten geworfene Kugel gilt die Bewegungsgleichung $v_{unten}=-g\cdot t-2\frac{m}{s}$.

Die Differenz der Geschwindigkeiten beträgt $\Delta v=v_{oben}-v_{unten}=-g\cdot t+2\frac{m}{s}-\left(-g\cdot t-2\frac{m}{s}\right)=4\frac{m}{s}$

Die Kugeln entfernen sich also mit der konstanten Geschwindigkeit $v=4\frac{m}{2}$.

γ) ist also die richtige Lösung.

2. Lösungsmöglichkeit:

Betrachtet man die zurückgelegten Wegstrecken, so ergibt sich:

$s_{oben}=-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2+2\cdot t$ *und* $s_{unten}=-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2-2\cdot t$

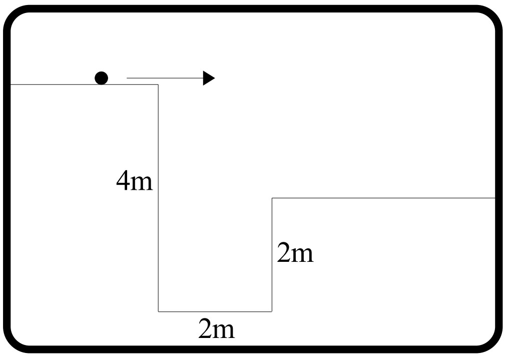
Zur Zeit t beträgt also die Entfernung der beiden Kugeln $s=s_{oben}-s_{unten}=4\cdot t$

Die Entfernung nimmt also proportional zur Zeit zu, d.h. es liegt eine geradlinig gleichförmige Bewegung vor mit der Geschwindigkeit $v=\frac{s}{t}=4$ *(s.o.).*

3 In einem Computerspiel läuft Punktio in seiner Welt mit der Geschwindigkeit $4\,\frac{m}{s}$ genau waagrecht auf den Abgrund zu. In der Spielewelt gelten alle Gesetzmäßigkeiten unserer realen Welt.

a) Berechnen Sie, wo Punktio landet, auf dem unteren oder dem mittelhohen Absatz.

b) Berechnen Sie, in welchem Wertebereich (Anfangs- und Endwert angeben) die Geschwindigkeit liegen muss, damit Punktio irgendwo an der rechten senkrechten Wand der Grube auftrifft.



Beide Aufgaben beziehen sich auf einen waagrechten Wurf

Lösung zu a):

Bewegungsgleichungen: $x=v_0\cdot t\,;\,y=-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \;\Rightarrow\; x=4\cdot t\,;\,y=-5\cdot t^2$

Lösungsidee: In welcher Höhe befindet sich Punktio, wenn er in waagrechter Richtung x = 2m zurückgelegt hat? Ist die Höhe kleiner als 2m, wird er oben landen, sonst unten oder an der senkrechten Wand.

Also: $x=4\cdot t=2 \;\Rightarrow\; t=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; y=-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{5}{4}=-1{,}25$ *Punktio landet also auf dem oberen Absatz.*

Lösung zu b):

Lösungsidee: Es wird berechnet, wie groß v sein muss, damit zur gleichen Zeit gilt $(x/y)=(2/-2)$ *(oberer Abschluss der senkrechten Kante) bzw.* $(x/y)=(2/-4)$ *(unterer Abschluss der senkrechten Kante).*

$$x=v\cdot t \;\Rightarrow\; t=\frac{x}{v} \;\Rightarrow\; y=-5\cdot t^2=-5\cdot\frac{x^2}{v^2} \;\Rightarrow\; v^2=\frac{-5\cdot x^2}{y} \;\Rightarrow\; v=\sqrt{\frac{-5\cdot x^2}{y}}$$

$$(x/y)=(2/-2) \;\Rightarrow\; v=\sqrt{\frac{-5\cdot 2^2}{-2}}=\sqrt{10}\approx 3{,}16 \quad (x/y)=(2/-4) \;\Rightarrow\; v=\sqrt{\frac{-5\cdot 2^2}{-4}}=\sqrt{5}\approx 2{,}24$$

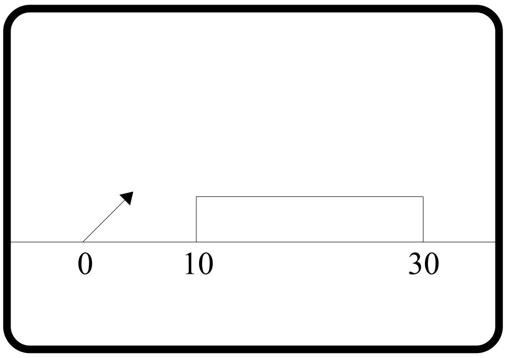
Punktios Geschwindigkeit muss also zwischen $v_1=\sqrt{5}\,\frac{m}{s}\approx 2{,}24\,\frac{m}{s}$ *und* $v_2=\sqrt{10}\,\frac{m}{s}\approx 3{,}16\,\frac{m}{s}$ *liegen.*

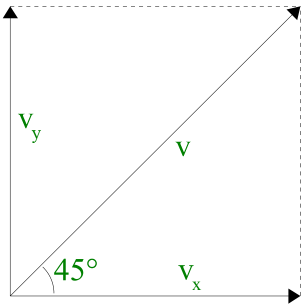
---

4 In einem anderen Computerspiel, in dem ebenfalls alle Gesetze unserer realen Welt gelten, muss man folgende Aufgabe lösen:
Ein Ball soll mit einer Ballmaschine auf das Dach des Flachbaues geschossen werden.
Der Abschusswinkel beträgt 45°.

Die Abschussgeschwindigkeit beträgt $20\,\frac{m}{s}$.

10 m vom Abschussort entfernt beginnt der Flachbau und 30 m entfernt endet er.
Der Flachbau hat eine Höhe von 4 m.
Berechnen Sie, ob der Ball auf dem Flachbau, davor oder dahinter auftrifft und in welcher Entfernung vom Abschussort entfernt (in waagrechter Richtung gemessen) der Auftreffort liegt.





$\cos\alpha = \frac{v_x}{v_0} \Rightarrow v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$

$\sin\alpha = \frac{v_y}{v_0} \Rightarrow v_y = v_0 \cdot \sin\alpha$

Es liegt hier ein schräger Wurf vor (schräg nach oben):

$$x = v_x \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \quad ; \quad y = v_y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Einsetzen der Werte:

$$x = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot t = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot t \quad ; \quad y = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot t - 5 \cdot t^2 = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot t - 5 \cdot t^2$$

Nun wird berechnet, wann der Ball die Höhe 4m (Dachhöhe) erreicht hat:

$$y = 4 = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot t - 5 \cdot t^2 \Rightarrow t^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot t + \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2 - \frac{4}{5}} = \sqrt{2} \pm \sqrt{\frac{6}{5}}$$

Das Minuszeichen gilt für den Anstieg, das Pluszeichen für das Herunterfallen des Balles.

Wie weit ist der Ball in x-Richtung in der Zeit $t_2 = \sqrt{2} + \sqrt{\frac{6}{5}}$ *voran gekommen?*

$$x = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{6}{5}} \right) = 20 + 10 \cdot \sqrt{\frac{12}{5}} \approx 35{,}5$$

Der Ball erreicht also erst hinter dem Haus wieder die Höhe des Daches und ist dabei 35,5m (waagrecht gemessen) vom Abflugpunkt entfernt.

$x = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{6}{5}} \right) = 20 - 10 \cdot \sqrt{\frac{12}{5}} \approx 4{,}51$ *gibt an, dass der Ball zum ersten Mal bei x=4,51m die Höhe des Hausdaches erreicht. Da das Haus erst nach 10m Strecke beginnt, trifft der Ball beim Steigen nicht die Hauswand, sondern fliegt wirklich über das Haus hinüber.*

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!